Cálculo Diferencial e Integral

1) Consideremos la función $f(x)=\begin{cases} 5x & si \quad 0<x\leq 10 \\ \sqrt{ax^2+500} & si \quad x>10 \end{cases}$

a) Continuidad en x = 10

$$\lim_{x\to 10^-} f(x)=\lim_{x\to 10}(5x)=50$$

$$\lim_{x\to 10^+} f(x)=\lim_{x\to 10}\left(\sqrt{ax^2+500}\right)=\sqrt{100\cdot a+500}$$

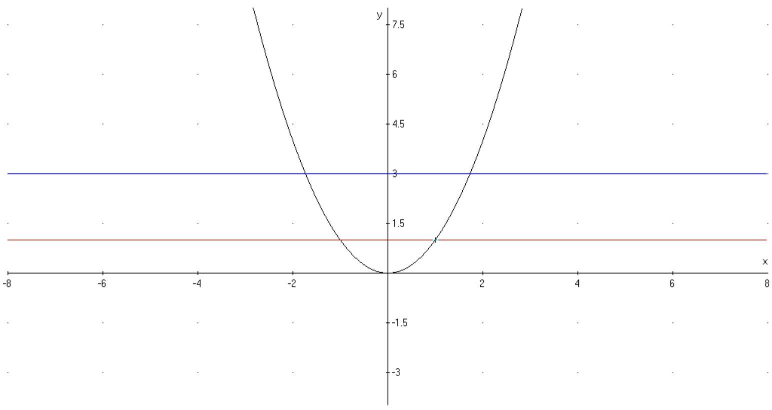
Como $f(x)$ es continua $\sqrt{100\cdot a+500}=50 \Rightarrow 100\cdot a+500=2500 \Rightarrow 100\cdot a=2000 \Rightarrow \boxed{a=20}$

b) $\lim_{x\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt{20x^2+500}}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{\dfrac{20x^2+500}{x^2}}\right)=\boxed{\sqrt{20}}$

---

2) Área entre $y=x^2$; $y=a$

Calculamos los cortes entre ellas. Se tiene: $x^2=a \Rightarrow x=\pm\sqrt{a}$, luego $S_1=2\int_0^{\sqrt{a}}(a-x^2)\,dx=$



$$2\cdot\left[ax-\frac{x^3}{3}\right]_0^{\sqrt{a}}=2\cdot\left[a\sqrt{a}-\frac{a\sqrt{a}}{3}\right]==\frac{4}{3}\cdot a\sqrt{a}$$

Área entre $y=x^2$; $y=1$

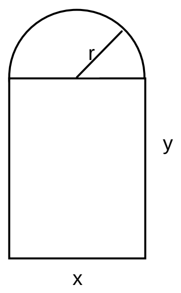
$$S_2=\int_0^1(1-x^2)\,dx=\left[x-\frac{x^3}{3}\right]_0^1=\frac{2}{3}$$

Igualando las áreas:

$$\frac{4}{3}\cdot a\sqrt{a}=\frac{2}{3}\Rightarrow a\sqrt{a}=\frac{1}{2}\Rightarrow \boxed{a=\sqrt[3]{\frac{1}{4}}}$$

---

3) Perímetro = 6 m $\Rightarrow 2y+x+\pi r=6$, donde r es el radio del semicírculo. Como $r=\dfrac{x}{2}$, sustituyendo



$$2y+x+\pi\cdot\frac{x}{2}=6\Rightarrow 6=2y+x\cdot\left(1+\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow y=\frac{6-x\cdot\left(1+\dfrac{\pi}{2}\right)}{2} \quad (*)$$

La función superficie será $S = x \cdot y + \frac{1}{2}\pi r^2 =$ como $r = \frac{x}{2}$ $= x \cdot y + \frac{1}{2}\pi \frac{x^2}{4} = x \cdot y + \frac{\pi x^2}{8}$

Sustituyendo el valor de y anterior (*), $S(x) = x \cdot \frac{6 - x \cdot \left(1 + \frac{\pi}{2}\right)}{2} + \frac{\pi x^2}{8}$

(función a maximizar)

Desarrollando, $S(x) = 3x - \frac{x^2}{2}\left(1 + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi x^2}{8}$; derivando, $S'(x) = 3 - x\left(1 + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{2\pi x}{8}$

Igualando a cero, $S'(x) = 3 - x\left(1 + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{2\pi x}{8} = 0 \Rightarrow 3 = x\left(1 + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi x}{4} = x\left(\frac{2+\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = x\left(\frac{4+3\pi}{4}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow 3 = x\left(\frac{4+3\pi}{4}\right) \Rightarrow \boxed{x = \frac{12}{4+3\pi}}$

Calculando la $y = \frac{6 - \frac{12}{4+3\pi} \cdot \left(1 + \frac{\pi}{2}\right)}{2} =$ operando $= \boxed{y = \frac{6(1+\pi)}{4+3\pi}}$

---

4) Sabemos que $f'(1) = 0 = f'(3)$, luego tanto $x = 1$ como $x = 3$ son posibles extremos

Como para $x < 3$, $f' > 0$ (la función crece) y para $x < 3$, $f' < 0$ (la función decrece), $\boxed{x = 3}$ <u>es un máximo</u>

De $x = 1$ en principio no podemos asegurar nada.

---

5) Supongamos que $\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = 0$, ¿Se cumple $\int_{-a}^{a} x \cdot f(x)\, dx = 0$? No, en general

Ejemplo.- Sea $f(x) = x$, y $a = 1$. Se cumple $\int_{-1}^{1} x\, dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{2} - \left(\frac{(-1)^2}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$

Sin embargo, $\int_{-1}^{1} x \cdot x\, dx = \int_{-1}^{1} x^2\, dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3} \neq 0$

---

6) Teórico

---

7) a) Consideremos $q(x) = k \cdot x^a$, con $a > 1$, así la función coste será

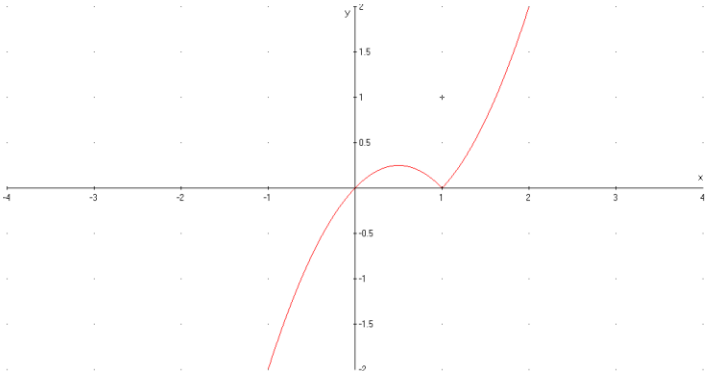
$$C(x) = \int_0^x k \cdot t^a dt = \left[k \cdot \frac{t^{a+1}}{a+1}\right]_0^x = k \cdot \frac{x^{a+1}}{a+1}$$

Sustituyendo, se tiene que: $C(1) = \frac{k}{a+1}$; $C(2) = \frac{k}{a+1} \cdot 2^{a+1}$, como $C(2)=8\sqrt{2}\cdot C(1) \Rightarrow \dfrac{k}{a+1}\cdot 2^{a+1} = 8\sqrt{2}\cdot\dfrac{k}{a+1} \Rightarrow 2^{a+1} = 8\sqrt{2} = 2^{7/2} \Rightarrow a+1=\dfrac{7}{2} \Rightarrow \boxed{a=\dfrac{5}{2}}$

b) $C(h)=128\cdot C(1) \Rightarrow \dfrac{k}{a+1}\cdot h^{a+1} = \dfrac{k}{a+1}\cdot h^{7/2} = \dfrac{k}{a+1}\cdot 128 \Rightarrow h^{7/2}=128 \Rightarrow \boxed{h=4}$

---

8) a) $f(x)=x\cdot|x-1| = \begin{cases} x(x-1) & x\geq 1 \\ x(1-x) & x<1 \end{cases} \Rightarrow f(x)=\begin{cases} x^2-x & x\geq 1 \\ x-x^2 & x<1 \end{cases}$



b) $f'(x)=\begin{cases} 2x-1 & x>1 \\ 1-2x & x<1 \end{cases}$. Estudiando en $x=1$

$f'(1^+)=(2x-1)_{x=1}=1$; $f'(1^-)=(1-2x)_{x=1}=-1$, con lo que es claro que **no es derivable**

c) $S=\displaystyle\int_0^1 (x-x^2)\,dx = \left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\boxed{\frac{1}{6}}$

---

9) Consideremos $f(x)=\begin{cases} 1 & si & x>2 \\ -1 & si & x\geq 2 \end{cases}$, es claro que <u>no</u> existe $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ (limites laterales distintos).

Sin embargo, $[f(x)]^2=1\ \ \forall x\in R$, con lo que siempre existe $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=1$

---

10) Si se cumple que $\displaystyle\int_{-x}^{0} f(x)\,dx = -\int_0^{-x} f(x)\,dx \Rightarrow \int_{-x}^{0} f(x)\,dx + \int_0^{-x} f(x)\,dx = 0 \Rightarrow \int_{-x}^{x} f(x)\,dx = 0$

Si $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$, por el Teorema Fundamental del Cálculo, $F(x)-F(-x)=0$

Derivando, $F'(x)-F'(-x)\cdot(-1)=0 \Rightarrow f(x)+f(-x)=0 \Rightarrow f(x)=f(-x)$

---

11) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} |x|\cdot senx\,dx = \int_{-\pi}^{0} (-x)\cdot senx\,dx + \int_0^{2\pi} (x)\cdot senx\,dx\ \ (\bullet)$

Sea $I=\displaystyle\int x\cdot senx\ \ dx=$ Procediendo por partes = $\begin{bmatrix} u=x\Rightarrow du=dx \\ dv=senx\Rightarrow v=-\cos x \end{bmatrix} = -x\cos x + \displaystyle\int \cos x\,dx \Rightarrow$

$\Rightarrow I=-x\cos x+senx+C$

Sustituyendo en $(\bullet)$: $\int_{-\pi}^{\pi} |x| \cdot senx\, dx = -[-x\cos x + senx]_{-\pi}^{0} + [-x\cos x + senx]_{-\pi}^{0} =$

$= -\pi \cdot \cos(-\pi) - 2\pi \cdot \cos 2\pi = \pi - 2\pi = \boxed{-\pi}$

---

12) Sea la ecuación $x^3 + \lambda x^2 - 2x = 1$, consideremos la función $f(x) = x^3 + \lambda x^2 - 2x - 1$

a) Sea el intervalo $(-\infty, 1)$ $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$; además $\lim_{x\to 1} f(x) = \lambda - 2$. Para que admita solución

$\lambda - 2 > 0 \Rightarrow \lambda > 2$

b) Sea el intervalo $(1, +\infty)$ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$; además $\lim_{x\to 1} f(x) = \lambda - 2$. Para que admita solución

$\lambda - 2 < 0 \Rightarrow \lambda < 2$

---

13) a) Calculamos $\int x \cdot e^x \; dx =$ Procediendo por partes = $\begin{bmatrix} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x \end{bmatrix} = xe^x - \int e^x \; dx =$

$= xe^x - e^x \Rightarrow \boxed{F(x) = e^x (x-1) + C}$

b) Si $F(x)$ pasa por el punto (0,1), se tiene $F(0) = 1 \Rightarrow e^0 (0-1) + C = 1 \Rightarrow -1 + C = 1 \Rightarrow C = 2$

Luego $F(x) = e^x (x-1) + 2$. Estudiamos su monotonía:

$F'(x) = xe^x$. Como $e^x > 0$, $\begin{matrix} si & x < 0 \Rightarrow F'(x) < 0 \Rightarrow \text{decreciente} \\ si & x > 0 \Rightarrow F'(x) > 0 \Rightarrow \text{creciente} \end{matrix}$. Luego (0,1) mínimo local

---

14) a) Es Falso.

Ejemplo.- Sean las funciones $f(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$ y $g(x) = \begin{cases} -1 & x > 0 \\ 1 & x \leq 0 \end{cases}$

Es claro que son discontinuas en $x = 1$

Sin embargo, $(f+g)(x) = 0 \;\; \forall x$, que es claramente continua.

b) Es Falso.

Ejemplo.- La función $f(x) = |x| = \begin{cases} x & si & x > 0 \\ -x & si & x < 0 \end{cases}$ es continua en $x = 0$

y sin embargo no es derivable en dicho punto, pues $f'(x) = \begin{cases} 1 & si & x > 0 \\ -1 & si & x < 0 \end{cases}$

---

15) a) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{senx(1-senx)}{\cos^2 x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{senx(1-senx)}{1-sen^2 x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{senx(1-senx)}{(1+senx)(1-senx)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{senx}{1+senx} = \boxed{\frac{1}{2}}$

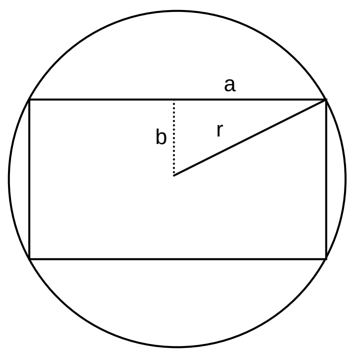
b) $\int_1^2 \ln x \, dx$. Calculamos la primitiva: $\int \ln x \, dx =$ Procediendo por partes = $\begin{bmatrix} u = \ln x \Rightarrow du = dx/x \\ dv = dx \Rightarrow v = x \end{bmatrix} =$

$$= x\ln x - \int \frac{dx}{x}\cdot x = x\ln x - x + C$$. Así $$\int_1^2 \ln x\,dx = \left[x\ln x - x\right]_1^2 = 2\ln 2 - 2 - (\ln 1 - 1) = \boxed{2\ln 2 - 1}$$

---

16) Sea un círculo de radio r

a) Consideremos el rectángulo de base 2a y altura 2b inscrito.



Aplicando Pitágoras:

$a^2 + b^2 = r^2 \Rightarrow a^2 = r^2 - b^2 \Rightarrow a = \sqrt{r^2 - b^2}$ $(\bullet)$

S(rectángulo) = $2a\cdot 2b = 4ab =$ sustituyendo $= 4b\sqrt{r^2 - b^2}$

Derivando e igualando a cero:

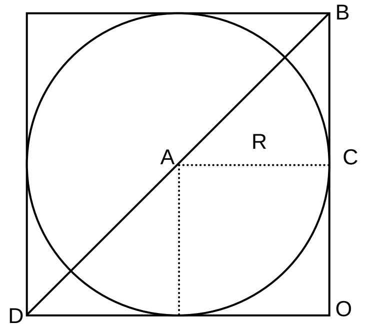
$$S'(b) = 4\sqrt{r^2 - b^2} - 4b\cdot\frac{2b}{2\sqrt{r^2 - b^2}} = 0$$

Operando: $4\sqrt{r^2 - b^2} = 4b\cdot\frac{2b}{2\sqrt{r^2 - b^2}} \Rightarrow r^2 - b^2 = b^2 \Rightarrow r^2 = 2b^2 \Rightarrow b^2 = \frac{r^2}{2} \Rightarrow \boxed{b = \frac{r\sqrt{2}}{2}}$

Sustituyendo en $(\bullet)$, $a = \sqrt{r^2 - b^2} = \sqrt{r^2 - \frac{r^2}{2}} = \sqrt{\frac{r^2}{2}} \Rightarrow \boxed{a = \frac{r\sqrt{2}}{2}}$

Con lo que tanto a como b valen $\frac{r\sqrt{2}}{2}$, con lo que se trata de un **cuadrado**.

b) Consideremos ahora un círculo de radio inscrito en el cuadrado de lado $r\sqrt{2}$



Se tiene $OB = r\sqrt{2} = DO$; $AB = r = AD$

Llamando R al radio del círculo inscrito, $S = \pi R^2$

- <u>En el triángulo OBD</u>, $DB^2 = BO^2 + DO^2 = 2r^2 + 2r^2 = 4r^2 \Rightarrow DB = 2r$
- <u>En el triángulo ABC</u>, $AB^2 = AC^2 + CB^2 \Rightarrow r^2 = R^2 + \frac{2r^2}{4} = R^2 + \frac{r^2}{2} \Rightarrow$

$$R^2 = r^2 - \frac{r^2}{2} = \frac{r^2}{2}\; S_{INS} = \pi R^2 = \pi\cdot\frac{r^2}{2} \quad ; \quad S_{CIR} = \pi r^2 .$$

Calculando el cociente: $\frac{S_{INS}}{S_{CIR}} = \frac{\pi\cdot\frac{r^2}{2}}{\pi\cdot r^2} = \boxed{\frac{1}{2}}$

---

17) Supongamos un triángulo isósceles de lados iguales **a** y desigual **b** y altura **h**

Perímetro $P = 60 \Rightarrow 2a + b = 60 \Rightarrow b = 60 - 2a$ Area = $S = \frac{b\cdot h}{2}$ $(\bullet)$

Aplicando Pitágoras: $a^2 = h^2 + \frac{b^2}{4} \Rightarrow h^2 = a^2 - \frac{b^2}{4} \Rightarrow h = \sqrt{\frac{4a^2 - b^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{4a^2 - b^2} =$

como $(b=60-2a)=\frac{1}{2}\sqrt{4a^2-(60-2a)^2}=\sqrt{60a-900}$

Sustituyendo en $(\bullet)$, $S(a)=\frac{b\cdot h}{2}=\frac{60-2a}{2}\cdot\sqrt{60a-900}=(30-a)\cdot\sqrt{60a-900}$

Derivando e igualando a cero, $S'(a)=-\sqrt{60a-900}+\frac{60(30-a)}{2\sqrt{60a-900}}=0\Rightarrow-(60a-900)+30(30-a)=0$

Resolviendo, $\boxed{a=20\,m}$; sustituyendo en la expresión de b, $\boxed{b=20\,m}$, luego el triángulo es equilátero.

---

18) $f(x)=\begin{cases}x^2+nx & si \quad x<-2\\ x^3+m & si \quad x\geq-2\end{cases}$ **a)** Verificamos hipótesis del Teorema del Valor Medio en [-4,2]

- $f(x)$ es continua en $[-4,2]$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-2^-}f(x)=\lim\limits_{x\to-2}(x^2+nx)=4-2n\\ \lim\limits_{x\to-2^+}f(x)=\lim\limits_{x\to-2}(x^3+nm)=-8+m\end{array}\right\}\Rightarrow 4-2n=-8+m\Rightarrow m=12-2n\ (*)$$

- $f(x)$ es derivable en $(-4,2)$ $\qquad f'(x)=\begin{cases}2x+n & si \quad x<-2\\ 3x^2 & si \quad x>-2\end{cases}$

$$\left.\begin{array}{l}f'(2^-)=(2x+n)_{x=-2}=-4+n\\ f'(2^+)=(3x^2)_{x=-2}=12\end{array}\right\}\Rightarrow-4+n=12\Rightarrow\boxed{n=16}$$

Sustituyendo en (*), $\boxed{m=20}$

b) Por el Teorema del Valor Medio, existe $x_0\in[-4,2]$ tal que $f'(x_0)=\frac{f(2)-f(-4)}{2-(-4)}=\frac{-12+48}{6}=6$

Como $f'(x)=\begin{cases}2x+16 & si \quad x<-2\\ 3x^2 & si \quad x>-2\end{cases}$ caben dos posibilidades $\left\langle\begin{array}{l}2x+16=6\Rightarrow x=-5\notin(-4,2)\\ 3x^2=6\Rightarrow x=\pm\sqrt{2}\end{array}\right.$

Luego los puntos pedidos son $\boxed{x_0=\pm\sqrt{2}}$

---

19) Sea la función $f(x)=\begin{cases}e^{-x}-1 & si \quad x\leq 0\\ x^2+x & si \quad x>0\end{cases}$

a) Continuidad en $x=0$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to-0}(e^{-x}-1)=0\\ \lim\limits_{x\to-0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}(x^2+x)=0\end{array}\right\}\Rightarrow \text{ Luego es continua}$$

b) Derivabilidad en $x=0$

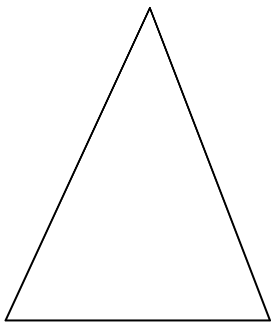
$$f'(x)=\begin{cases}-e^{-x} & si \quad x<0\\ 2x+1 & si \quad x>0\end{cases} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} f'(0^-)=(-e^{-x})_{x=0}=-1 \\ \\ f'(0^+)=(2x+1)_{x=0}=1\end{array}\right\} \Rightarrow \text{ No derivable}$$

c) Extremos

Como $\left.\begin{array}{l} f'(0^-)<0 \\ f'(0^+)>0\end{array}\right\} \Rightarrow$ (0,0) es un mínimo

---

20) Sabemos que $AB=10$ y $CH=6$



a) $A=DE\cdot FH=x\cdot FH \ (\bullet)$

Como $CHB\approx DPB \Rightarrow \dfrac{CH}{DP}=\dfrac{HB}{PB}\Rightarrow \dfrac{6}{DP}=\dfrac{5}{PB}$

Ahora bien, $DP=FH$ y $PB=HB-HP=5-\dfrac{x}{2}$

Sustituyendo arriba, $\dfrac{6}{FH}=\dfrac{5}{5-\dfrac{x}{2}}\Rightarrow FH=\dfrac{30-3x}{5}$

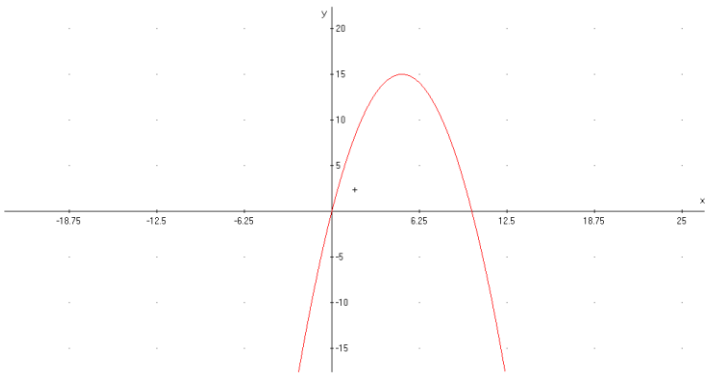
Así en $(\bullet)$ $A(x)=x\cdot\dfrac{(30-3x)}{5}=\dfrac{30x-3x^2}{5}\Rightarrow \boxed{A(x)=-\dfrac{3}{5}x^2+6x}$

b) $D=R$; Calculamos el vértice de la parábola:

$A'(x)=-\dfrac{6}{5}x+6=0\Rightarrow x=5$; Así $V(5{,}15)$

Cortes con los ejes, $(0{,}0)$ y $(10{,}0)$

c) El máximo es el vértice de la parábola, es decir, $\boxed{A(5)=15}$



---

21) Sabemos que $V=8\,\text{dm}^3$

$V=x^2y\Rightarrow x^2y=8\Rightarrow y=\dfrac{8}{x^2}\ (\bullet)$

La superficie exterior será, $S=2x^2+4xy$, sustituyendo el valor de y:

$S(x)=2x^2+4x\cdot\dfrac{8}{x^2}=2x^2+\dfrac{32}{x}$, derivando, $S'(x)=4x-\dfrac{32}{x^2}$, igualando a cero,

$4x-\dfrac{32}{x^2}=0\Rightarrow 4x^3=32\Rightarrow \boxed{x=2}$, sustituyendo en $(\bullet)$, $\boxed{y=2}$

Luego se trata de un cubo.

---

22) a) $\lim_{x\to\infty}(\ln(x+1)-\ln(x))=\infty-\infty=\lim_{x\to\infty}\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)=\ln\left[\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x}\right)\right]=\ln 1=\boxed{0}$

b) $\lim_{x\to\infty}x(\ln(x+1)-\ln(x))=\lim_{x\to\infty}x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\left[\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)^x\right]=\ln\left[\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x}\right)^x\right]=$

$\ln\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right]=\ln e=\boxed{1}$

---

23) a) $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$, derivando $f'(x)=3ax^2+2bx+c$

Se tiene $\begin{cases} f(1)=0 & \Rightarrow & a+b+c+d=0 \\ f'(0)=2 & \Rightarrow & c=2 \\ f'(1)=0 & \Rightarrow & 3a+2b+c=0 \\ f'(2)=0 & \Rightarrow & 12a+4b+c=0 \end{cases}$

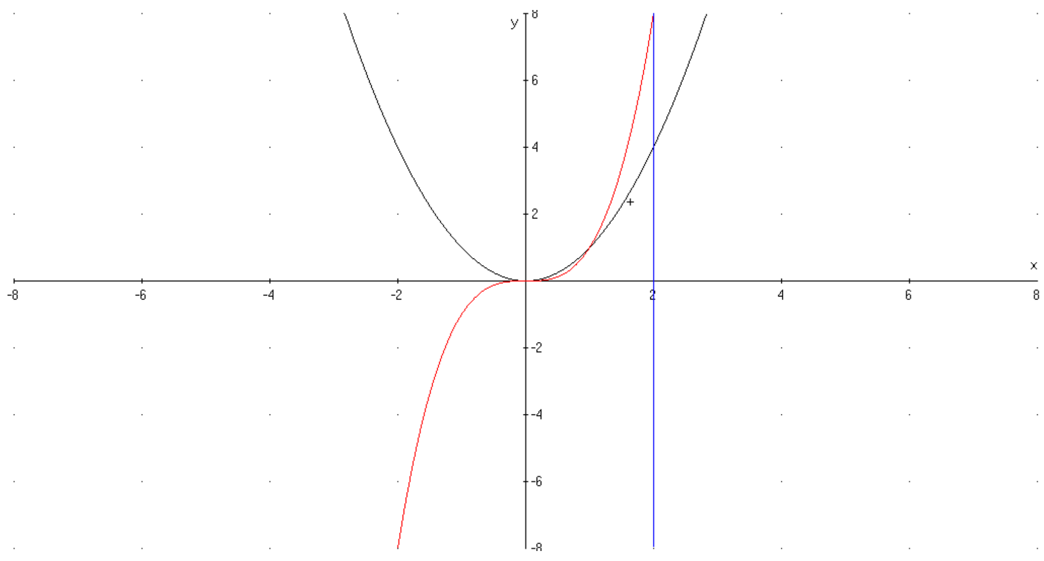
Resolviendo el sistema: $\boxed{a=\frac{1}{3};b=-\frac{3}{2};c=2;d=-\frac{5}{6}}$

b) la función será $f(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}+2x+-\frac{5}{6}$; derivando $f'(x)=x^2-3x+2$ volviendo a derivar,

$f''(x)=2x-3$ Sustituyendo, $\left\langle \begin{array}{l} f''(1)=2-3<0 \\ f''(2)=4-3>0 \end{array}\right.$ con lo que $\boxed{x=1}$ máximo ; $\boxed{x=2}$ mínimo

---

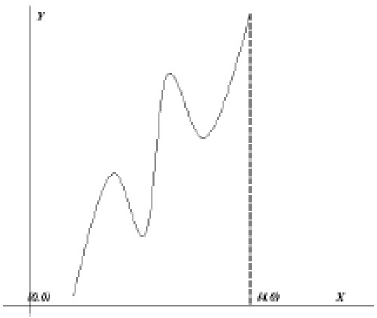
24) Sean las funciones $f(x)=x^2$, $g(x)=x^3$, y la recta $x=2$. Gráficamente:



El área será $S=\int_0^1 (x^2-x^3)\,dx+\int_1^2 (x^3-x^2)\,dx=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\right]_0^1+\left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}\right]_1^2=\boxed{\frac{3}{2}}$

---

25)



La función tiene al menos cuatro extremos, luego el grado del polinomio tiene que ser 5 como mínimo

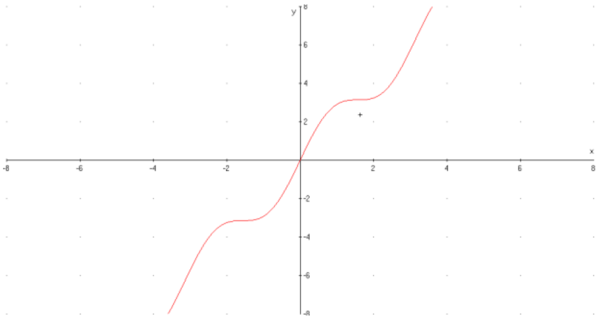
---

26) a) $f(x)=2x+sen2x$

- No tiene asíntotas verticales, pues $\lim_{x\to x_0} f(x)$ es siempre finito.
- No tiene asíntotas horizontales, $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$
- Asíntotas Oblicuas,

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x}{x}+\frac{sen2x}{x}\right)=2$$

$n=\lim_{x\to\infty}\left(2x+sen2x-2x\right)=\lim_{x\to\infty} sen2x$ (que no existe)



Luego no tiene asíntotas

b) $f'(x)=2+2\cos 2x>0$, pues $-1\le\cos 2x\le 1$,

$f(x)$ es siempre creciente (no tiene extremos)

---

27) Sea $D(x)=(r_1-x)^2+(r_2-x)^2+(r_3-x)^2$ con $r_1, r_2, r_3\in\Re$

Derivando e igualando a cero, $D(x)=-2(r_1-x)-2(r_2-x)-2(r_3-x)=0\Rightarrow$

$$\Rightarrow -2\left(r_1-x+r_2-x+r_3-x\right)=0\Rightarrow r_1+r_2+r_3-3x=0\Rightarrow x=\frac{r_1+r_2+r_3}{3}$$

Calculando la derivada segunda, $D''(x)=6>0$, luego $\boxed{x=\frac{r_1+r_2+r_3}{3}}$ es mínimo

---

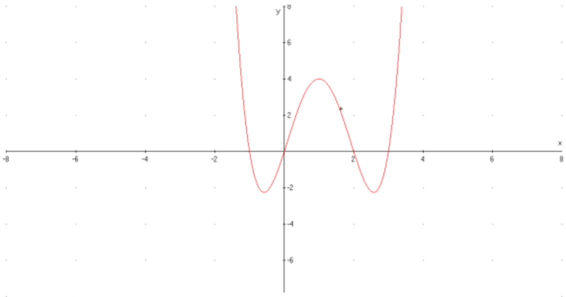
28) $f(x)=x^4-4x^3+x^2+6x$

- Cortes con los ejes

Con OX.- $y=0 \Rightarrow x^4-4x^3+x^2+6x=0 \Rightarrow x(x+1)(x-2)(x-3)=0 \Rightarrow$

$x=0,\ x=-1,\ x=2,\ x=3 \Rightarrow (0,0),\ (-1,0),\ (2,0),\ (3,0)$

Con OY.- Si $x=0 \Rightarrow y=0$, luego $(0,0)$

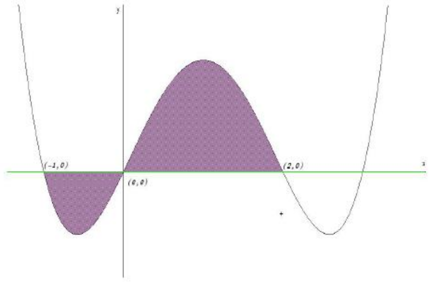


- Crecimiento-Decrecimiento

$$f'(x)=4x^3-12x^2+2x+6=0 \Rightarrow x=0,\ x=\frac{2\pm\sqrt{10}}{2}$$

En $\left(-\infty,\frac{2-\sqrt{10}}{2}\right)\cup\left(1,\frac{2-\sqrt{10}}{2}\right)$ crece;

En $\left(\frac{2-\sqrt{10}}{2},1\right)\cup\left(\frac{2-\sqrt{10}}{2},+\infty\right)$ decrece



- Área.- $S=\int_{-1}^{2} f(x)\,dx=-\int_{-1}^{0} f(x)\,dx+\int_{0}^{2} f(x)\,dx=$

$$=-\left[\frac{x^5}{5}-\frac{4x^4}{4}+\frac{x^3}{3}-\frac{6x^2}{2}\right]_{-1}^{0}+\left[\frac{x^5}{5}-\frac{4x^4}{4}+\frac{x^3}{3}-\frac{6x^2}{2}\right]_{0}^{2}=$$

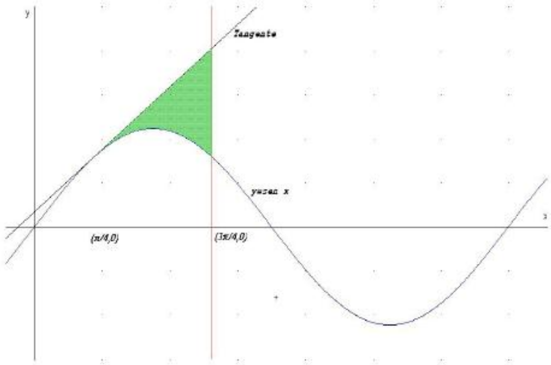
$$=-\left[-\frac{1}{5}-1-\frac{1}{3}+3\right]+\left[\frac{32}{5}-16+\frac{8}{3}+12\right]=\boxed{\frac{98}{15}}$$

---

29) a) $f(x)=sen\,x$

$$S=\int_0^a senx\,dx=\frac{1}{2}\Rightarrow\left[-\cos x\right]_0^a=\frac{1}{2}\Rightarrow-\cos a+\cos 0=\frac{1}{2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1-\cos a=\frac{1}{2}\Rightarrow\cos a=\frac{1}{2}\Rightarrow\boxed{a=\frac{\pi}{3}}$$



b) Tangente a $f(x)=sen\,x$ en $x=\frac{\pi}{4}$;

$$y-f\left(\frac{\pi}{4}\right)=f'\left(\frac{\pi}{4}\right)\left(x-\frac{\pi}{4}\right) \text{ operando } \boxed{y-\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}$$

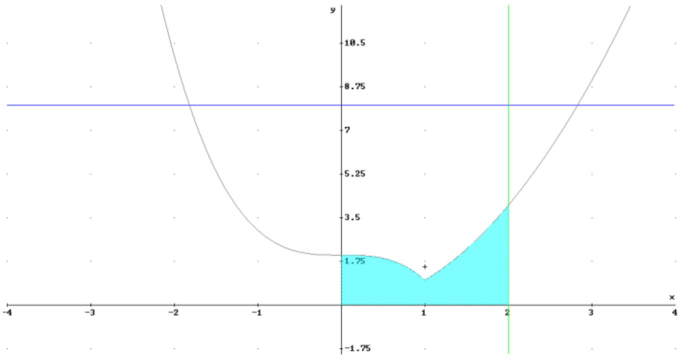
c) $$S=\int_{\pi/4}^{3\pi/4}\left[\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-senx\right]dx=\int_{\pi/4}^{3\pi/4}\left[\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}x-\cdot\frac{\pi}{4}\frac{\sqrt{2}}{2}-senx\right]=$$

$$=\frac{\pi^2\sqrt{2}}{16}+\frac{\pi\sqrt{2}}{4}-\sqrt{2}=\boxed{\sqrt{2}\cdot\left(\frac{\pi^2}{16}+\frac{\pi}{4}-1\right)}$$

---

30) $f(x)=\begin{cases}(2-x)^3 & si \quad x\le 1\\ x^2 & si \quad x>1\end{cases}$

a) Continuidad en $x=1$



$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1}(2-x)^3=1\\ \lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1} x^2=1\end{array}\right\}\Rightarrow \text{ Luego es continua}$$

b) Derivabilidad en $x=1$

$$f'(x)=\begin{cases}-3(2-x)^2 & si \quad x<1\\ 2x & si \quad x>1\end{cases}\Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l}f'(1^-)=(-3(2-x)^2)_{x=1}=-3\\ f'(1^+)=(2x)_{x=1}=2\end{array}\right\}\Rightarrow \text{ No derivable}$$

c) $S_1=\int_0^1 (8-(2-x)^3)\,dx=\left[\frac{x^4}{4}-2x^3+6x^2\right]_0^1=\frac{17}{4}$

$S_2=\int_1^2 (8-x^2)\,dx=\left[8x-\frac{x^3}{3}\right]_1^2=\frac{17}{3}$; $\quad S=S_1+S_2=\frac{17}{4}+\frac{17}{3}=\boxed{\frac{119}{12}}$

---

31) $f(x)=x^2-4x+2$

a) Extremos relativos.- $f'(x)=2x-4=0\Rightarrow x=2$

Luego $\boxed{(2,-2)}$ mínimo

b) Rectas tangentes por P(3,-5)

Recta tangente en $(a,f(a))$, $y-f(a)=f'(a)\cdot(x-a)$

En nuestro caso:

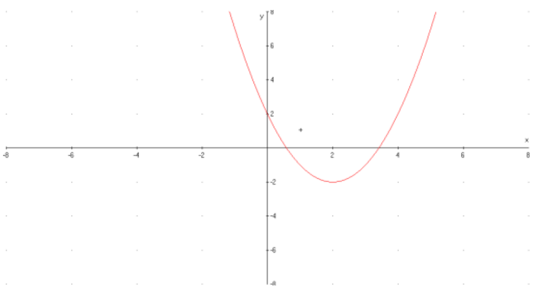
$y-(a^2-4a+2)=(2a-4)\cdot(x-a)$, operando,

$y=(2a-4)x-a^2+2$

Como P(3,-5) pertenece a dicha recta,

$-5=(2a-4)\cdot 3-a^2+2\Rightarrow a^2-6a+5=0$

Resolviendo, $a=5$, $a=1$, con lo que los puntos



de tangencia son $P(1,-1)$ y $Q(5,7)$, luego habrá dos rectas tangentes: $\boxed{\begin{cases}y+1=-2(x-1)\\ y-7=6(x-5)\end{cases}}$

32) $f(x)=x^2-2x+3$; $g(x)=ax^2+b$

a) Si f y g son tangentes en $x=2 \Rightarrow f'(2)=g'(2)$

Luego $2=4a \Rightarrow \boxed{a=\dfrac{1}{2}}$. Además $f(2)=g(2)$, luego

$3=4a+b=2+b \Rightarrow \boxed{b=1}$

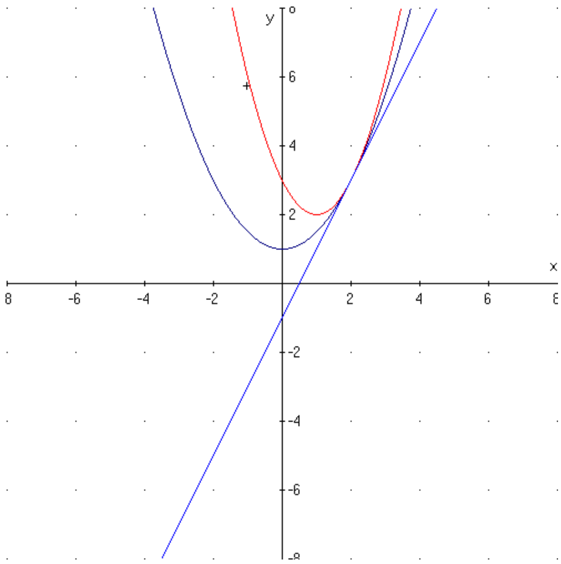
b) Sustituyendo los valores anteriores:

$$f(x)=x^2-2x+3\ ;\ g(x)=\frac{1}{2}x^2+1$$

Recta tangente: $y-f(2)=f'(2)\cdot(x-2)$, ó bien

$y-g(2)=g'(2)\cdot(x-2)$. Utilizando la primera:

$y-3=2x-2 \Rightarrow \boxed{2x-y-1=0}$



c) $S=\displaystyle\int_0^2\left[(x-2x+3)-\left(\frac{x^2}{2}+1\right)\right]dx=\int_0^2\left(\frac{x^2}{2}-2x+2\right)dx=\boxed{\frac{4}{3}}$

---

33) a) $I=\displaystyle\int\frac{1}{1+e^t}\ dt$; Hacemos el cambio de variable $z=e^t \Rightarrow dz=e^t\ dt \Rightarrow dt=\dfrac{dz}{e^t}=\dfrac{dz}{z}$.

Sustituyendo en $I=\displaystyle\int\frac{1}{1+e^t}\ dt=\int\frac{dz}{z(1+z)}=\int\frac{A}{z}dz+\int\frac{B}{1+z}dz=$ **(*)**

Para determinar las variables *A* y *B*:

$$\left.\begin{array}{r}1=A(1+z)+B\\ Si\quad z=0\Rightarrow A=1\\ Si\quad z=-1\Rightarrow B=-1\end{array}\right\}\Rightarrow\int\frac{1}{1+e^t}\ dt=\int\frac{dz}{z}-\int\frac{dz}{1+z}=\ln|z|-\ln|z+1|+C$$

Deshaciendo el cambio de variable: $I=\ln|e^t|-\ln|e^t+1|+C \Rightarrow \boxed{I=t-\ln(e^t+1)+C}$

b) Sea $g(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)\ dt=\left[t-\ln(e^t+1)\right]_0^x=x-\ln(e^x+1)-(0-\ln(e^0+1))=x-\ln(e^x+1)+\ln 2$

$$\lim_{x\to0}\frac{g(x)}{x}=\lim_{x\to0}\left(\frac{x-\ln(1+e^x)+\ln 2}{x}\right)=\frac{0}{0}=L'Hop=\lim_{x\to0}\left(\frac{1-\dfrac{e^x}{1+e^x}}{1}\right)=\lim_{x\to0}\left(1-\frac{e^x}{1+e^x}\right)=1-\frac{1}{2}=\boxed{\frac{1}{2}}$$

---

34) Si $P(x)$ es par, $P(x)=ax^4+bx^2+c$

Sabemos que $\begin{cases} P(1)=0 \Rightarrow a+b+c=0 \\ P(-\sqrt{5})=0 \Rightarrow 25a+5b+c=0 \\ P(0)=5 \Rightarrow c=5 \end{cases}$; Resolviendo, $a=1, b=-6, c=5$

Luego, $\boxed{P(x)=x^4-6x^2+5}$

a) <u>Puntos de Inflexión</u>.- $P'(x)=4x^3-12x \Rightarrow P''(x)=12x^2-12=0 \Rightarrow x=\pm 1$

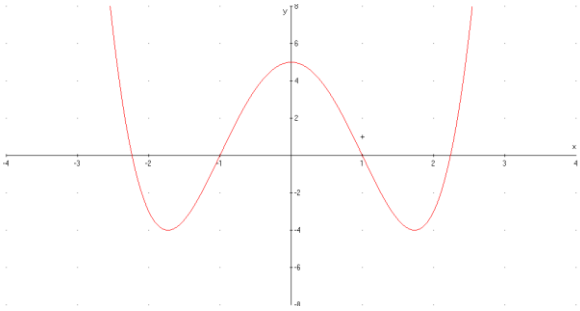
Así, los puntos de inflexión son: $\boxed{(-1,0),(1,0)}$

b) <u>Gráfica</u>

Hallamos extremos:

$P'(x)=4x^3-12x=0 \Rightarrow 4x(x^2-3)=0 \Rightarrow x=\pm\sqrt{3}, x=0$

(0,5) máximo ; $(-\sqrt{3},-4), (\sqrt{3},-4)$, mínimos



---

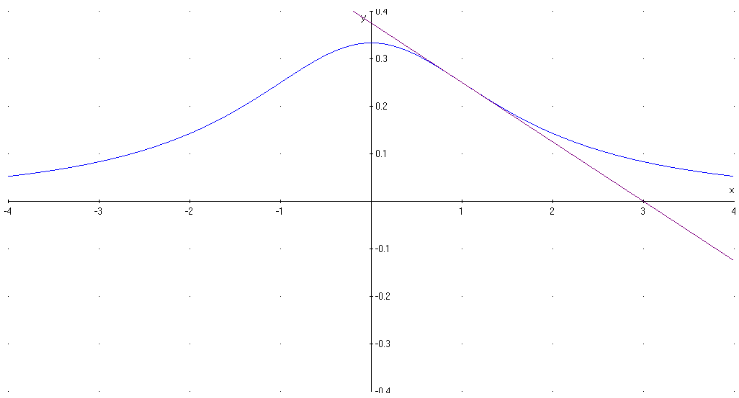
35) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+3} \Rightarrow f'(x)=\dfrac{-2x}{(x^2+3)^2} \Rightarrow f''(x)=\dfrac{6(x^2-1)}{(x^2+3)^3}$

a) Hallamos sus puntos de inflexión:

$f''(x)=\dfrac{6(x^2-1)}{(x^2+3)^3}=0 \Rightarrow x^2-1=0 \Rightarrow x=\pm 1$; luego Puntos de Inflexión $\left(-1,\dfrac{1}{4}\right)$, $\left(1,\dfrac{1}{4}\right)$

Calculamos recta tangente en $\left(1,\dfrac{1}{4}\right)$; $y-f(1)=f'(1)\cdot(x-1) \Rightarrow y-\dfrac{1}{4}=-\dfrac{2}{16}(x-1) \Rightarrow \boxed{x+8y-3=0}$

b) $S=\displaystyle\int_0^1 \left[\frac{3-x}{8}-\frac{1}{x^2+3}\right]dx=$



Calculamos $I=\displaystyle\int \left[\frac{3-x}{8}-\frac{1}{x^2+3}\right]dx=$

$I=\dfrac{3x}{8}-\dfrac{x^2}{16}-\displaystyle\int \left[\frac{1}{x^2+3}\right]dx=$

$$=\frac{3x}{8}-\frac{x^2}{16}-\frac{1}{3}\int \left[\frac{1}{\frac{x^2}{3}+1}\right]dx=\frac{3x}{8}-\frac{x^2}{16}-\frac{\sqrt{3}}{3}\int \left[\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2}\right]dx=\frac{3x}{8}-\frac{x^2}{16}-\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot arctg\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)+C$$

Así, $S=\left[\dfrac{3x}{8}-\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\cdot arctg\left(\dfrac{x}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^1=\boxed{\dfrac{5}{16}-\dfrac{\pi\sqrt{3}}{18}}$

---

36) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2+3x+1}{x} & si \quad x\geq -1 \\ \dfrac{2x}{x-1} & si \quad x<-1 \end{cases}$

a) Dominio-Continuidad $\quad D=\Re-\{0\}$

Continuidad en $x=-1$

$\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x}{x-1}=1$; $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+3x+1}{x}=1$; Luego continua en $D=\Re-\{0\}$

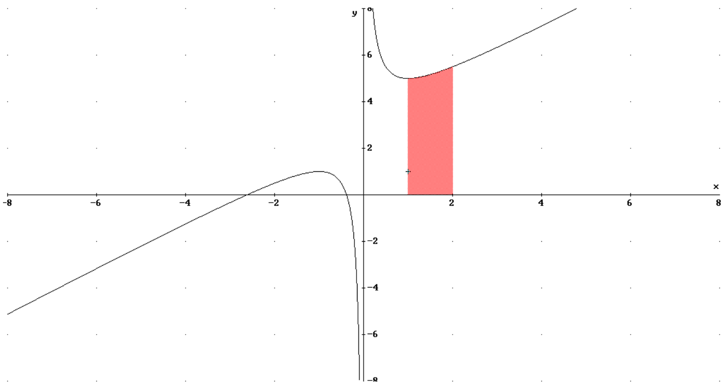
b) Asíntotas.- **Verticales**.- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+3x+1}{x}=\infty$; luego $x=0$, Eje OY

Horizontales.- Si $x\geq -1$: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+3x+1}{x}=\infty$; no tiene

Si $x<-1$: $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{2x}{x-1}=2$; luego $y=2$

Oblicuas.- $m=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+3x+1}{x^2}=1$; $n=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+3x+1}{x}-x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+1}{x}\right)=3\Rightarrow y=x+3$

c) $S=\displaystyle\int_1^2\left(\dfrac{x^2+3x+1}{x}\right)dx=$ dividiendo



$S=\displaystyle\int_1^2 x\,dx+\int_1^2 3\,dx+\int_1^2\dfrac{1}{x}\,dx=$

$=\left[\dfrac{x^2}{2}+3x+\ln x\right]_1^2=2+6+\ln 2-\dfrac{1}{2}-3=$

$=\boxed{\dfrac{9}{2}+\ln 2}$

---

37) $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}\Rightarrow f'(x)=\dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2}=0\Rightarrow 1-x^2=0\Rightarrow x=\pm 1$

a) En $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ decrece; $(-1,1)$ crece

$\left(-1,\dfrac{1}{2}\right)$ mínimo ; $\left(1,\dfrac{1}{2}\right)$ máximo

b) $\displaystyle\int_0^a f(x)\;dx=1\Rightarrow\int_0^a\dfrac{x}{x^2+1}\;dx=1\Rightarrow\left[\dfrac{1}{2}\ln(x^2+1)\right]_0^a=1\Rightarrow\dfrac{1}{2}\ln(a^2+1)-\dfrac{1}{2}\ln 1=1$

$$\frac{1}{2}\ln(a^2+1)=1 \Rightarrow \ln(a^2+1)=2 \Rightarrow a^2+1=e^2 \Rightarrow a^2=e^2-1 \Rightarrow \boxed{a=\sqrt{e^2-1}}$$

---

38) $f(x)=\begin{cases} \sqrt[3]{x-2} & si \quad x\geq 2 \\ x(x-2) & si \quad x<2 \end{cases}$

a) Continuidad en $x=2$

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\left(\sqrt[3]{x-2}\right)=0$; $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\left(x(x-2)\right)=0$; Luego continua en $\Re$

Derivabilidad en $x=2$

$$f'(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{3\sqrt[3]{(x-2)^2}} & si \quad x>2 \\ 2x-2 & si \quad x<2 \end{cases} \Rightarrow = \begin{cases} f'(2^+)=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{(2-2)^2}} & No\ existe \\ f'(2^-)=2\cdot 2-2=2 & \end{cases}$$

$f(x)$ es derivable en $\Re-\{2\}$

b) Recta tangente en (3,1)

$$y-f(3)=f'(3)\cdot(x-3) \Rightarrow y-1=\frac{1}{3}\cdot(x-3) \Rightarrow \boxed{x-3y=0}$$

---

39) a) $g(x)=f\left(x+f(0)\right) \Rightarrow g'(x)=f'(x+f(0))\cdot(x+f(0))=f'(x+1)(1+f'(0))=f'(x+1)\cdot 4$

$g'(0)=f'(0+1)\cdot 4=4\cdot 4 \Rightarrow \boxed{g'(0)=16}$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2(f(x))^2-f(x+1)}{e^x-1}=\dfrac{2\cdot(0)^2-f(1)}{1-1}=\dfrac{2-2}{0}=\dfrac{0}{0}=L'Hop=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4\cdot f(x)\cdot f'(x)-f'(x+1)}{e^x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4\cdot f(0)\cdot f'(0)-f'(1)}{1}=\dfrac{4\cdot 1\cdot 3-4}{1}=\boxed{8}$

---

40) a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos(3x))}{\ln(\cos(2x))}=\dfrac{0}{0}=L'Hop=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\dfrac{-3sen(3x)}{\cos(3x)}}{\dfrac{-2sen(2x)}{\cos(2x)}}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\cdot tg(3x)}{2\cdot tg(2x)}=\dfrac{0}{0}=L'Hop=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{9\cdot(1+tg^2(3x))}{4\cdot(1+tg^2(2x))}=$

$=\boxed{\dfrac{9}{4}}$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}}{4x}=\dfrac{0}{0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}\right)\cdot\left(\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x}\right)}{4x\left(\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x}\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4+x-4+x}{4x\left(\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x}\right)}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{4x\left(\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x}\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{2\cdot\left(\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x}\right)}=\boxed{\dfrac{1}{8}}$

---

41) a) $f(x)=\dfrac{x^5-x^8}{1-x^6}$ Resolviendo la ecuación $1-x^6=0 \Rightarrow x^6=1 \Rightarrow x=\pm 1$

Clasificación discontinuidades

- $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^5-x^8}{1-x^6}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^5(1-x^3)}{(1-x^3)(1+x^3)}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^5}{1+x^3}=-\infty$, $x=-1$, discontinuidad no evitable
- $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^5-x^8}{1-x^6}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^5(1-x^3)}{(1-x^3)(1+x^3)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^5}{1+x^3}=\dfrac{1}{2}$, $x=1$, discontinuidad evitable

b) Asíntotas

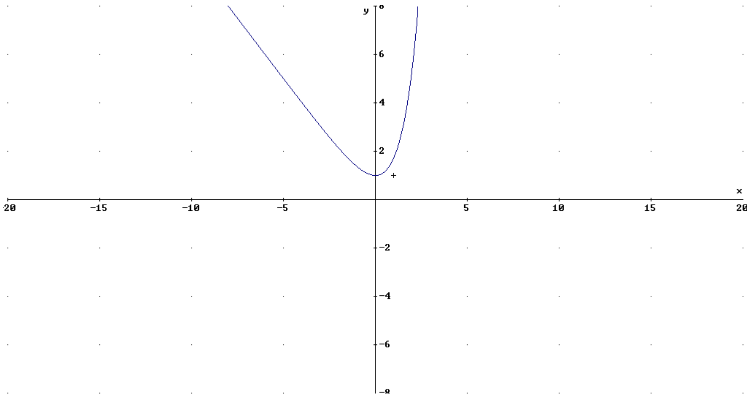
En el apartado anterior, se ve que $x=-1$ es una asíntota vertical

---

42) a) $g(x)=e^x-x$; D = R ; Cortes ejes: (0,1) ;

$g'(x)=e^x-1=0 \Rightarrow x=0$; (0,1) es un mínimo

$g''(x)=e^x>0$, luego no tiene puntos de inflexión; es siempre $\bigcup$ (concava)



b) Sea $f(x)=\dfrac{1}{e^x-x}$

Dominio = R pues $e^x-x\neq 0$

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{1}{e^x-x}=\frac{1}{e^{-\infty}-(-\infty)}=\frac{1}{0+\infty}=0$$

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{1}{e^x-x}=\frac{1}{e^{+\infty}-(+\infty)}=\frac{1}{(+\infty)-(+\infty)}=$$

$=\dfrac{1}{+\infty}=0$ (pues $e^x>x$), luego $y=0$

c) $f(x)=\dfrac{1}{e^x-x} \Rightarrow f'(x)=\dfrac{1-e^x}{(e^x-x)^2}=0 \Rightarrow 1-e^x=0 \Rightarrow x=0$

Derivando de nuevo, $f''(x)=\dfrac{e^{2x}+e^x(x-4)+2}{(e^x-x)^2} \Rightarrow f''(0)=\dfrac{1-4+2}{1}=-1<0$, luego (0,1) máximo

---

43) a) $f(x)=\dfrac{senx}{2-\cos x}$, definida en $[-2\pi,2\pi]$

$$f'(x)=\frac{2\cos x-1}{(2-\cos x)^2}=0 \Rightarrow \cos x=\frac{1}{2} \Rightarrow x=\left\langle \begin{array}{l}\pi/3\\ -\pi/3\\ 5\pi/3\\ -5\pi/3\end{array}\right. \; ; \; f''(x)=\frac{-2sen\,x(1+\cos x)}{(2-\cos x)^3}$$

Evaluando en los puntos:

- $f''\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{-4\sqrt{3}}{9}<0$; $f''\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{3}>0$; $f''\left(-\dfrac{5\pi}{3}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{3}>0$; $f''\left(\dfrac{5\pi}{3}\right)=\dfrac{-4\sqrt{3}}{9}<0$

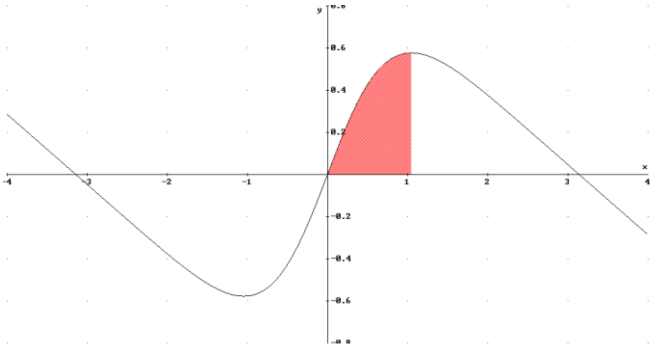
$$\boxed{x=-\frac{\pi}{3},\ x=\frac{5\pi}{3}\ \text{mínimos relativos},\ x=\frac{\pi}{3},\ x=-\frac{5\pi}{3}\ \text{máximos relativos}}$$

Como $f(-2\pi)=f(2\pi)=0$, los extremos relativos anteriores son absolutos.

b) $\displaystyle\int \frac{sen\,x}{2-\cos x}\,dx=\ln(2-\cos x)+C$

Luego, $\displaystyle\int_0^{\pi/3} \frac{sen\,x}{2-\cos x}\,dx=\ln\left(2-\cos\frac{\pi}{3}\right)-$

$\displaystyle-\ln(2-\cos 0)=\ln\left(2-\frac{1}{2}\right)-\ln 1=\boxed{\ln\left(\frac{3}{2}\right)}$



---

44) a) $f(x)=2x|4-x|=\begin{cases}2x(4-x) & si\quad x<4\\ 2x(x-4) & si\quad x\geq 4\end{cases}\Rightarrow f(x)=\begin{cases}8x-2x^2 & si\quad x<4\\ 2x^2-8x & si\quad x\geq 4\end{cases}$

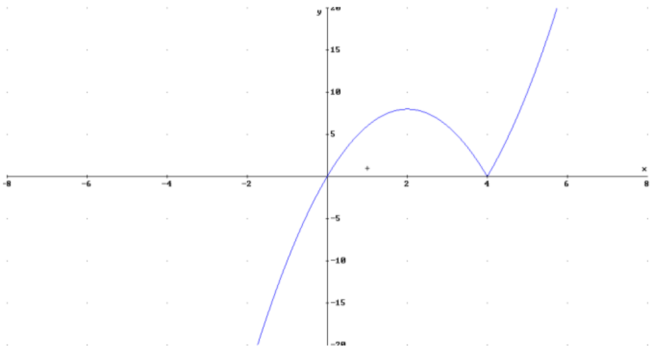
- <u>Continuidad</u>.- En $x=4$

  $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 4}(8x-x^2)=0$; $\lim\limits_{x\to 4^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 4}(2x^2-8x)=0$, luego continua

- <u>Derivabilidad</u>.- $f'(x)=\begin{cases}8-4x & si\quad x<4\\ 4x-8 & si\quad x>4\end{cases}$, evaluando en $x=4$ $\begin{cases} f'(4^-)=(8-4x)_{x=4}=-8\\ f'(4^+)=(4x-8)_{x=4}=8\end{cases}$

  Luego no es derivable en $x=4$

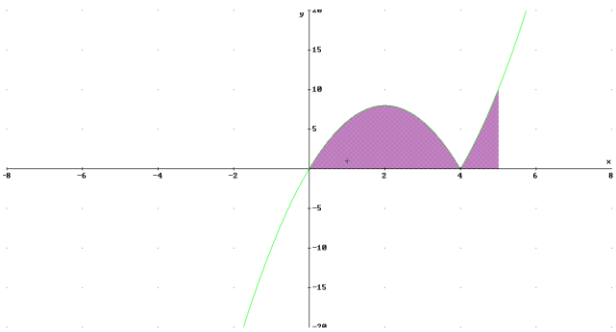
b) Representación gráfica



c) Area

$$\int_0^4 (2x(4-x))\,dx+\int_4^5 (2x(x-4))dx=\int_0^4 (8x-2x^2)\,dx+$$

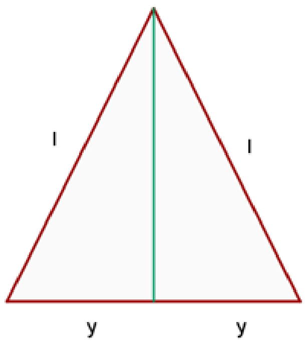
$$+\int_4^5 (2x^2-4x)dx=\left[\frac{8x^2}{2}-\frac{2x^3}{3}\right]_0^4+\left[\frac{2x^3}{3}-\frac{8x^2}{2}\right]_4^5=\boxed{26}$$



---

45) Sea $2y$ la longitud del lado desigual , y $\boldsymbol{l}$ la de los lados iguales.

Perímetro = 8 $\Rightarrow 2y+2l=8 \Rightarrow y+l=4 \Rightarrow l=4-y$



Función a maximizar, $A=\dfrac{2y\cdot h}{2}=y\cdot h$ **(*)**

Por Pitágoras, si h es la altura, $l^2=y^2+h^2 \Rightarrow h^2=l^2-y^2 \Rightarrow h=\sqrt{l^2-y^2}$, como $l=4-y$, $h=\sqrt{l^2-y^2}=\sqrt{(4-y)^2-y^2}=\sqrt{16-8y}$

Sustituyendo en **(*),** $A(y)=y\cdot\sqrt{16-8y}=\sqrt{16y^2-8y^3}$, derivando:

$$A'(y)=\frac{32y-24y^2}{2\sqrt{16y^2-8y^3}}=\frac{16y-12y^2}{\sqrt{16y^2-8y^3}}0 \Rightarrow 16y-12y^2=0 \Rightarrow 4y(4-3y)=0 \Rightarrow \left\langle \begin{array}{l} y=0 \\ y=4/3 \end{array}\right.$$

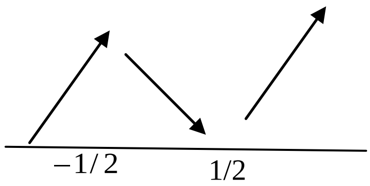
Es claro que $y\neq 0$, (pues en otro caso no existiría triángulo), luego $y=\dfrac{4}{3}$, luego $\boxed{Base=\dfrac{8}{3}}$

Para calcular la altura, $l=4-y=4-\dfrac{4}{3}=\dfrac{8}{3} \Rightarrow l^2=y^2+h^2 \Rightarrow h^2=l^2-y^2 \Rightarrow h=\sqrt{\left(\dfrac{8}{3}\right)^2-\left(\dfrac{4}{3}\right)^2}=$

$$=\sqrt{\frac{64}{9}-\frac{16}{9}}=\sqrt{\frac{48}{9}}=\sqrt{\frac{16\cdot 3}{9}} \Rightarrow \boxed{h=\frac{4\cdot\sqrt{3}}{3}}$$

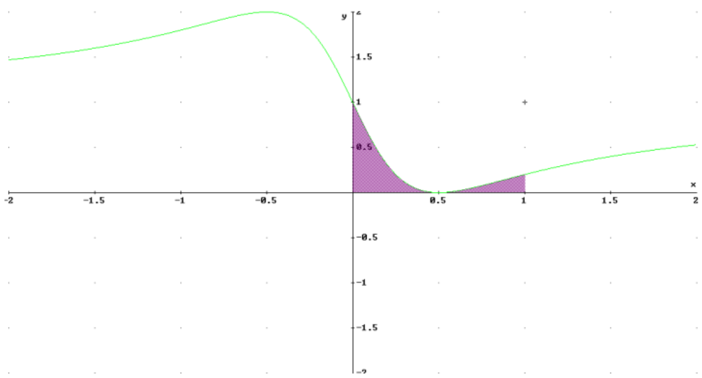
---

46) a) <u>Máximos y mínimos</u> : $f(x)=\dfrac{(2x-1)^2}{4x^2+1} \Rightarrow f'(x)=\dfrac{4(4x^2-1)}{(4x^2+1)^2}=0 \Rightarrow 4x^2-1=0 \Rightarrow x=\pm\dfrac{1}{2}$



Es claro que $\left(-\dfrac{1}{2},2\right)$ es un máximo, y $\left(\dfrac{1}{2},0\right)$ es un mínimo

<u>Asíntotas</u>: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x-1)^2}{4x^2+1}=1$, luego $y=1$ asíntota horizontal



b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{(2x-1)^2}{4x^2+1}dx=\int_0^1\frac{4x^2-4x+1}{4x^2+1}dx=$

= dividiendo los polinomios =

$$=\int_0^1\left(1-\frac{4x}{4x^2+1}\right)dx=\left[x-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)\right]_0^1=$$

$$=\boxed{1-\frac{1}{2}\ln 5}$$

---

47) a) Recta tangente en $(a, f(a))$, $y - f(a) = f'(a)(x-a)$

Como $f(x) = 1 - x^2 \Rightarrow f(a) = 1 - a^2$; $f'(x) = -2x \Rightarrow f'(a) = -2a$, sustituyendo,

$y - (1 - a^2) = -2a(x-a)$, operando, $\boxed{r \equiv y = 1 + a^2 - 2ax}$

b) Sea $A = r \cap OY \Rightarrow \begin{cases} y = 1 + a^2 - 2ax \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{A(0, 1 + a^2)}$

Sea $B = r \cap OX \Rightarrow \begin{cases} y = 1 + a^2 - 2ax \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{B\left(\dfrac{1+a^2}{2a}, 0\right)}$

c) Si $P(a, 1-a^2)$, $d(A,P) = \sqrt{(a-0)^2 + (1-a^2-1-a^2)^2} = a\sqrt{1+4a^2}$

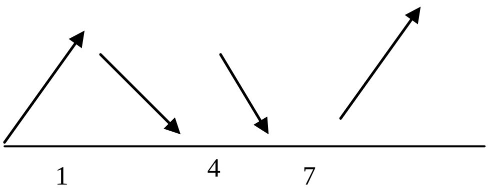
$$d(B,P) = \sqrt{\left(\frac{1+a^2}{2a} - a\right)^2 + (1-a^2)^2} = \frac{1-a^2}{2a}\sqrt{1+4a^2}.$$

Como $d(A,P) = 2d(B,P) \Rightarrow a\sqrt{1+4a^2} = 2 \cdot \dfrac{1-a^2}{2a}\sqrt{1+4a^2} \Rightarrow a = \dfrac{1-a^2}{a} \Rightarrow a^2 = 1 - a^2 \Rightarrow a^2 = \dfrac{1}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \left\langle \begin{array}{l} a = -\sqrt{2}/2 \\ a = \sqrt{2}/2 \end{array} \right.$, como $-\dfrac{\sqrt{2}}{2} \notin (0,1)$, $\boxed{a = \dfrac{\sqrt{2}}{2}}$

---

48) a) $f'(x) = (x-4)^2(x^2 - 8x + 7) = 0 \Rightarrow \left\langle \begin{array}{l} x = 4 \\ x^2 - 8x + 7 = 0 \Rightarrow \left\langle \begin{array}{l} x = 1 \\ x = 7 \end{array} \right. \end{array} \right.$



b) $x = 1$ máximo ; $x = 7$ mínimo

c) $f''(x) = 2(x-4)(x^2 - 8x + 7) + (x-4)^2(2x-8)$,

Es claro que $f''(4) = 0$. Además $f'''(x) = 6(2x^2 - 16x + 29)$

$\Rightarrow f''(4) = -18 \neq 0$, luego sí es un punto de inflexión.

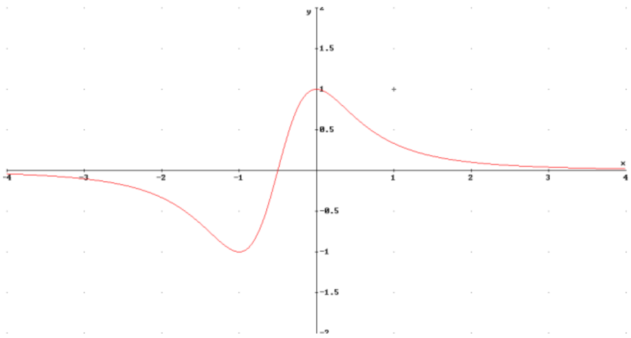
---

49) a) $f'(x) = \dfrac{-6x(x+1)}{(x^2+x+1)^3} = 0 \Rightarrow \left\langle \begin{array}{l} x = 0 \\ x = -1 \end{array} \right.$; A su vez, $f''(x) = \dfrac{6(2x+1)(2x^2+2x-1)}{(x^2+x+1)^4}$

$f''(0) = -6 < 0$; $f''(-1) = 6 > 0$, luego $x = 0$ máximo ; $x = -1$ mínimo

<u>Asíntotas</u>: Como $x^2 + x + 1 \neq 0$, no tiene verticales; $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0 \Rightarrow y = 0$ es asíntota horizontal

b)

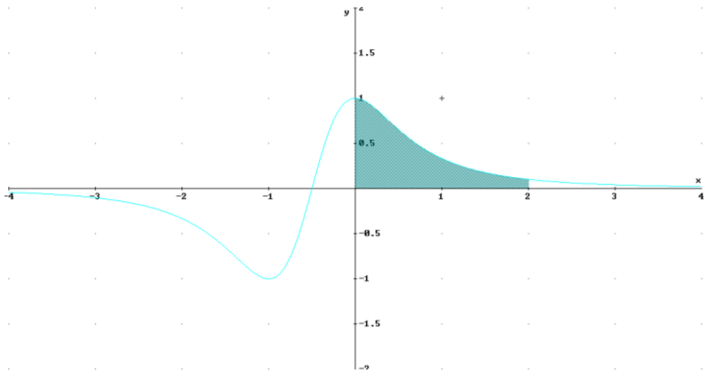


c) $S=\int_0^2\left(\frac{2x+1}{x^2+x+1)^2}\right)dx$; Calculamos la primitiva:

$$I=\int\left(\frac{2x+1}{x^2+x+1)^2}\right)dx=\text{Cambio}\begin{Bmatrix}t=x^2+x+1\\ dt=(2x+1)\,dx\end{Bmatrix}\Rightarrow I=\int\frac{dt}{t^2}=-\frac{1}{t}+C=\text{deshaciendo el cambio}=$$

$$=-\frac{1}{x^2+x+1}+C\,.$$

Así $S=\int_0^2\left(\frac{2x+1}{x^2+x+1)^2}\right)dx=\left[\frac{-1}{x^2+x+1}\right]_0^2=\left(\frac{-1}{7}+1\right)=\boxed{\frac{6}{7}}$



---

50) Sea $I=\int f(x)\,dx=Partes=\begin{Bmatrix}u=f(x)\Rightarrow du=f'(x)\,dx\\ v=dx\Rightarrow v=x\end{Bmatrix}=x\,f(x)-\int x\,f'(x)\,dx$

$$\int_0^1 f(x)\,dx=\left[x\,f(x)-\int x\,f'(x)\,dx\right]_0^1=1\cdot f(1)-\int_0^1 x\,f'(x)\,dx=-\int_0^1 x\,f'(x)\,dx=\boxed{-\frac{1}{2}}$$

---

51) $P(x)=ax^3+bx^2+cx+d$, derivando $P'(x)=3ax^2+2bx+c\Rightarrow P''(x)=6ax+2b$

- Máximo en $x=1\Rightarrow P'(1)=0\Rightarrow 3a+2b+c=0$ (*)
- Punto de Inflexión en (0,1) $\Rightarrow P''(0)=0\Rightarrow 2b=0\Rightarrow b=0$
- $P(0)=1\Rightarrow d=1$

Sustituyendo en (*), $3a+c=0\Rightarrow c=-a$, luego $P(x)=ax^3-3ax+1$

Como $\int_0^1 P(x)\,dx=\frac{5}{4}\Rightarrow\left[\frac{ax^4}{4}-\frac{3ax^2}{3}+x\right]_0^1=\frac{5}{4}\Rightarrow\frac{a}{4}-\frac{3a}{2}+1=0\Rightarrow\frac{a-6a+4}{4}=\frac{5}{4}\Rightarrow a=-\frac{1}{5}$

Con lo que $\boxed{P(x)=-\frac{1}{5}x^3+\frac{3}{5}x+1}$

---

52) a) $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}\right)=\infty-\infty=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}\right)}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}}\right)=$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+x-(x^2-x)}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}}\right)=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\frac{2x}{x}}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{x}{x^2}}+\sqrt{\frac{x^2}{x^2}-\frac{x}{x^2}}}\right)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}}\right)=\boxed{1}$$

b) $\lim_{x\to\infty}\left[x\cdot arctg(e^x)-\frac{\pi}{2}\right]=\infty.0=\lim_{x\to\infty}\frac{arctg(e^x)-\frac{\pi}{2}}{1/x}=\frac{0}{0}=L'Hop=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{e^x}{1+e^{2x}}}{-1/x^2}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{-x^2e^x}{1+e^{2x}}\right)=\frac{\infty}{\infty}=$

$$=L'Hop=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{-2xe^x-x^2e^x}{2e^{2x}}\right)=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{-2x-x^2}{2e^x}\right)=\frac{\infty}{\infty}=L'Hop=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{-2-2x}{2e^x}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{-1-x}{e^x}\right)=$$

$$=L'Hop=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{-1}{e^x}\right)=\boxed{0}$$

---

53) a) Si $f(x)=\frac{1}{x}\Rightarrow f'(x)=-\frac{1}{x^2}$, recta tangente en $(a, f(a))$ es $y-f(a)=f'(a)\cdot(x-a)$

Sustituyendo, $y-\frac{1}{a}=-\frac{1}{a^2}\cdot(x-a)$, operando, $\boxed{y=\frac{2}{a}-\frac{x}{a^2}}$

b) Sea $A=r\cap OX$, haciendo $y=0$ en la recta anterior, $-\frac{1}{a}=-\frac{1}{a^2}\cdot(x-a)\Rightarrow\frac{a^2}{a}=x-a\Rightarrow x=a$

Con lo que $\boxed{A(2a,0)}$

Por otra parte, sea $B=r\cap OY$, haciendo $x=0$ en la recta anterior, $y-\frac{1}{a}=-\frac{1}{a^2}\cdot(-a)\Rightarrow y=\frac{2}{a}$

Luego $\boxed{B\left(0,\frac{2}{a}\right)}$

c) Consideremos $d(A,B)=\sqrt{4a^2+\frac{4}{a^2}}=\sqrt{\frac{4a^4+4}{a^2}}=\frac{\sqrt{4a^4+4}}{a}$ (minimizar),

Derivando respecto de a, $d'(a)=\frac{\frac{16a^3}{2\sqrt{4a^4+4}}\cdot a-\sqrt{4a^4+4}}{a^2}=\frac{16a^4-2(4a^4+4)}{2a^2\sqrt{4a^4+4}}=\frac{8a^4-8}{2a^2\sqrt{4a^4+4}}\Rightarrow$

Igualando a cero, $d'(a)=\dfrac{8a^4-8}{2a^2\sqrt{4a^4+4}}=0 \Rightarrow \dfrac{4a^4-4}{a^2\sqrt{4a^4+4}}=0 \Rightarrow 4a^4=4 \Rightarrow a^4=1$, como $a>0$, $\boxed{a=1}$

---

54) Sea $f(x)=\ln\left(\dfrac{x^2}{x-1}\right)$, recta tangente en $(a, f(a))$ es $r: y-f(a)=f'(a)\cdot(x-a)$. Si tiene que ser paralela al eje OX, la pendiente será cero, luego $f'(a)=0$

$f(x)=\ln\left(\dfrac{x^2}{x-1}\right)=\ln(x^2)-\ln(x-1)$, derivando, $f'(x)=\dfrac{2x}{x^2}-\dfrac{1}{x-1}=\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{x-1}$.

Si $f'(a)=0 \Rightarrow \dfrac{2}{a}-\dfrac{1}{a-1}=0 \Rightarrow \dfrac{2(a-1)-a}{a(a-1)}=0 \Rightarrow 2a-2-a=0 \Rightarrow a=2$, calculando $f(2)=\ln(4)$

Luego el punto pedido será $\boxed{P(2,\ln(4))}$

---

55) a) Sea $f(x)=\dfrac{e^x}{(1+e^x)^2}$, derivando, $f'(x)=\dfrac{e^x-e^{2x}}{(1+e^x)^3}=0 \Rightarrow e^x-e^{2x}=0 \Rightarrow e^x(1-e^x)=0 \Rightarrow$

Como $e^x \neq 0$, $e^x-1=0 \Rightarrow e^x=1 \Rightarrow x=0$. Como $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x}{(1+e^x)^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{(1+e^x)^2}=0$, y en $x=0$ la función vale $\dfrac{1}{4}$, el punto $\boxed{\left(0,\dfrac{1}{4}\right)}$ será máximo absoluto. (No tiene mínimos)

b) $\displaystyle\int_0^a f(x)\,dx=\frac{1}{4} \Rightarrow \int_0^a \frac{e^x}{(1+e^x)^2}\,dx=\frac{1}{4}$. Sea $\displaystyle I=\int \frac{e^x}{(1+e^x)^2}\,dx=$ Cambio $t=1+e^x \Rightarrow dt=e^x\,dx \Rightarrow$

$\displaystyle\Rightarrow I=\int \frac{dt}{t^2}=-t^{-1}+C$. Deshaciendo el cambio, $\displaystyle\Rightarrow I=-t^{-1}+C=-\frac{1}{1+e^x}+C$

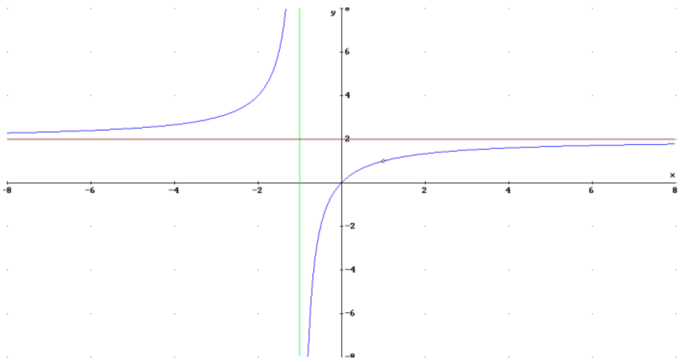
Si $\displaystyle\int_0^a \frac{e^x}{(1+e^x)^2}\,dx=\frac{1}{4} \Rightarrow \left[-\frac{1}{1+e^x}\right]_0^a=\frac{1}{4} \Rightarrow -\frac{1}{1+e^a}+\frac{1}{2}=\frac{1}{4} \Rightarrow -\frac{1}{1+e^a}=-\frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{1+e^a}=\frac{1}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow 1+e^a=4 \Rightarrow e^a=3 \Rightarrow \boxed{a=\ln(3)}$

---

56) Sea la función $f(x)=\dfrac{2x}{x+1}$. $D=R-\{-1\}$, derivando:

$f'(x)=\dfrac{1}{(x+1)^2}>0$, luego siempre es creciente



Monotonía.- En $(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$ crece.

Asíntotas: Es claro que $x=-1$ es una asíntota vertical, pues $\lim\limits_{x\to-1} f(x)=\infty$

Además, $\lim_{x\to\infty} f(x) = 2 \Rightarrow y = 2$ es asíntota horizontal.

b) Sea la sucesión $a_n = \dfrac{2n}{n+1}$, que es creciente por serlo la función $f(x) = \dfrac{2x}{x+1}$ (ver apartado a))

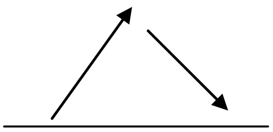
c) $\lim_{n\to\infty} n^2(a_{n+1} - a_n) = \lim_{n\to\infty} n^2\left(\dfrac{2(n+1)}{n+2} - \dfrac{2n}{n+1}\right) = \lim_{n\to\infty} n^2\left(\dfrac{2(n+1)-2n}{(n+2)(n+1)}\right) = \lim_{n\to\infty} \dfrac{2n^2}{(n+1)(n+2)} =$

$= \lim_{n\to\infty} \dfrac{2n^2}{n^2+3n+2} = \boxed{2}$

---

57) a) $f(x) = \dfrac{1}{(x-2)^2}$, $D = R - \{2\}$

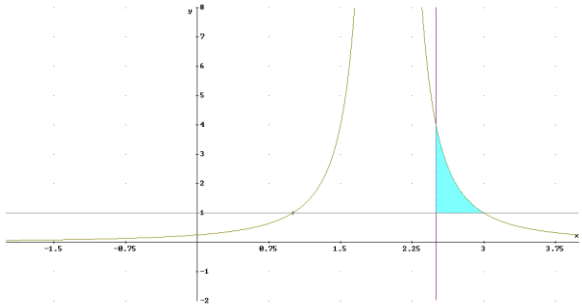
$f'(x) = \dfrac{-2}{(x-2)^3}$; $f''(x) = \dfrac{6}{(x-2)^4} > 0$, siempre $\bigcup$



2

<u>Asíntotas</u>.- Vertical $x = 2$

Eje OY, horizontal



b) Calculamos la intersección de la curva con $y = 1$,

$$\frac{1}{(x-2)^2} = 1 \Rightarrow (x-2)^2 = 1 \Rightarrow x = 3$$

$$S = \int_{5/2}^{3}\left(\frac{1}{(x-2)^2} - 1\right)dx = \left[-\frac{1}{x-2} - x\right]_{5/2}^{3} = \left(-\frac{1}{1} - 3\right) - \left(-\frac{1}{1/2} - \frac{5}{2}\right) = -4 - \left(-2 - \frac{5}{2}\right) = \frac{9}{2} - 4 = \boxed{\frac{1}{2}}$$

---

58) $I = \displaystyle\int \frac{dx}{x^2+2x} = \int \frac{dx}{x(x+2)} = \int \frac{A}{x}dx + \int \frac{B}{x+2}dx$

Igualando coeficientes, $1 = A(x+2) + Bx$, dando valores, $\left\{\begin{array}{c} x = 0 \Rightarrow 1 = 2A \Rightarrow A = 1/2 \\ x = -2 \Rightarrow 1 = -2B \Rightarrow B = -1/2 \end{array}\right\}$

Sustituyendo en la integral, $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+2x} = \int \frac{1/2}{x}dx + \int \frac{-1/2}{x+2}dx = \frac{1}{2}\ln|x| - \frac{1}{2}\ln|x+2| = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x}{x+2}\right| + C$

Así, $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x^2+2x} = \left[= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x}{x+2}\right|\right]_1^2 = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{2}{4}\right| - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1}{3}\right| = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{2/4}{1/3}\right| = \boxed{\frac{1}{2}\cdot\ln\left(\frac{3}{2}\right)}$

---

59) $f(x) = x \cdot e^{2x}$

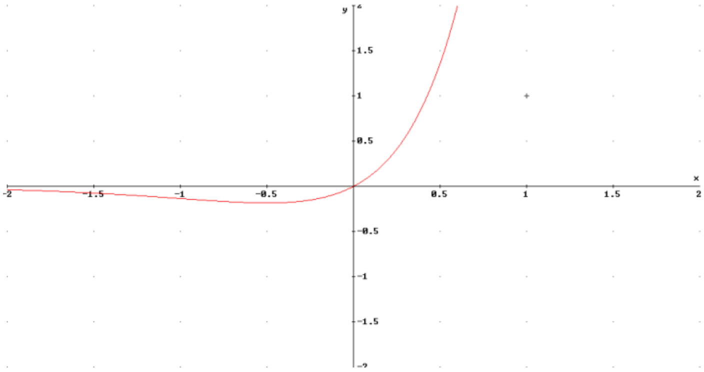
a) Dominio: R, derivando: $f'(x) = (2x+1)\cdot e^{2x} = 0 \Rightarrow x = -\dfrac{1}{2}$

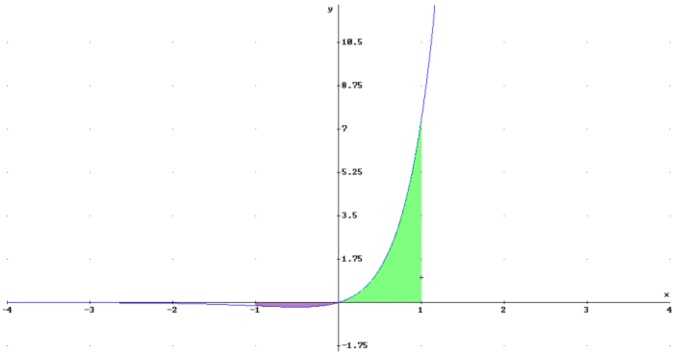
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0 \Rightarrow y=0$ es una asíntota horizontal.

En $(-\infty,-1/2)$ decrece, en $(-1/2,+\infty)$ crece, luego $\left(-\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2e}\right)$ mínimo

Derivando dos veces, $f''(x)=4(x+1)\cdot e^{2x}=0 \Rightarrow x=-1$

En $(-\infty,-1)$ $\cap$, en $(-1,+\infty)$ $\cup$, luego $\left(-1,-\dfrac{1}{e^2}\right)$ punto de inflexión





b) $\displaystyle\int x\cdot e^{2x}dx=$ Aplicando partes $= =\left\{\begin{array}{c} u=x\Rightarrow du=dx \\ dv=e^{2x}dx\Rightarrow v=e^{2x}/2\end{array}\right\}=x\cdot\frac{e^{2x}}{2}-\int\frac{e^{2x}}{2}dx=\frac{xe^{2x}}{2}-\frac{1}{2}\frac{e^{2x}}{2}+C=$

$\displaystyle =e^{2x}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)+C$; Así: $\displaystyle\int_{-1}^{1}x\cdot e^{2x}dx= =\left[e^{2x}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)\right]_{-1}^{1}=e^2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)-e^{-2}\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)=\boxed{\frac{e^2}{4}+\frac{3}{4e^2}}$

---

60) a) Sea $f(x)=x^2+m$, con $m>0$, recta tangente en $(a,f(a))$ es $r:y-f(a)=f'(a)\cdot(x-a)$.

En este caso, $f'(x)=2x\Rightarrow f'(a)=2a$, como $f(a)=a^2+m$, la recta r será:

$r:y-(a^2+m)=2a\cdot(x-a)$. Si tiene que pasar por (0,0), $-(a^2+m)=-2a^2\Rightarrow a^2=m\Rightarrow \boxed{a=\sqrt{m}}$

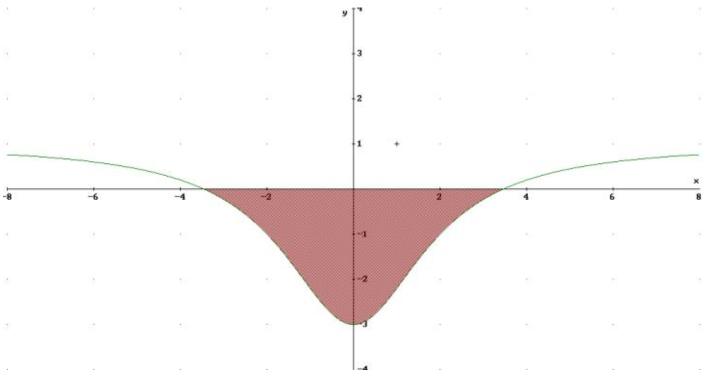
b) La recta $y=x$ es tangente a $f(x)$, luego $f'(a)=(x)'=1\Rightarrow 2a=1\Rightarrow a=\dfrac{1}{2}$, como $a^2=m\Rightarrow \boxed{m=\dfrac{1}{4}}$

---

61) $f(x)=\dfrac{x^2-12}{x^2+4}$; D = R; Corta a los ejes en $(-2\sqrt{3},0),(2\sqrt{3},0)$ y $(0,-3)$

$f'(x)=\dfrac{32x}{(x^2+4)^2}=0\Rightarrow x=0$; Decrece en $(-\infty,0)$ y crece en $(0,+\infty)$, luego $(0,-3)$ es mínimo.

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-12}{x^2+4}=1\Rightarrow y=1$ es asíntota horizontal



$$S=-2\int_0^{2\sqrt{3}}\left(\frac{x^2-12}{x^2+4}\right)dx$$

$$I=\int\left(\frac{x^2-12}{x^2+4}\right)dx=\int\left(1-\frac{16}{x^2+4}\right)dx=$$

$$=x-\int\left(\frac{16}{4\left(1+\left(\frac{x}{2}\right)^2\right)}\right)dx=x-4\int\frac{dx}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}=$$

$$=x-4\cdot 2\int\frac{(1/2)dx}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}=x-8\,arctg\left(\frac{x}{2}\right)+C$$

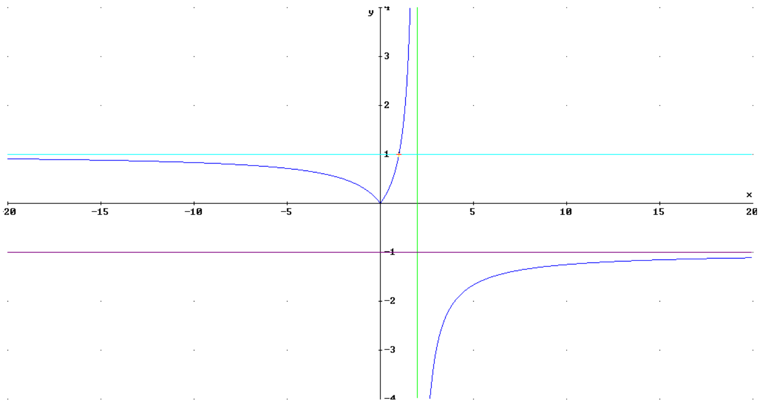
Así, $S=-2\int_0^{2\sqrt{3}}\left(\frac{x^2-12}{x^2+4}\right)dx=-2\left[x-8\,arctg\left(\frac{x}{2}\right)\right]_0^{2\sqrt{3}}=-2\left[2\sqrt{3}-8\,arctg\left(\frac{2\sqrt{3}}{2}\right)\right]=-2\left[2\sqrt{3}-8\frac{\pi}{3}\right]=$

$=\boxed{\frac{16\pi}{3}-4\sqrt{3}}$

---

62) $f(x)=\frac{|x|}{2-x}=\begin{cases}\frac{-x}{2-x} & si \quad x\le 0\\ \frac{x}{2-x} & si \quad x>0\end{cases}$; $D=R-\{2\}$;

$$f'(x)=\begin{cases}\frac{-2}{(2-x)^2} & si \quad x<0\\ \frac{2}{(2-x)^2} & si \quad x>0\end{cases}.$$



Es continua en $D=R-\{2\}$ y derivable en $D=R-\{0,2\}$

Decrece en $(-\infty,0)$ y crece en $(0,2)\cup(2,+\infty)$,

Asíntotas.- La recta $x=2$ es vertical; $\lim_{x\to-\infty}\frac{-x}{2-x}=1\Rightarrow y=1$; $\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{2-x}=-1\Rightarrow y=-1$, horizontales

---

63) a) $f(x)=\frac{3x^2+x+3}{x^2+1}$; $D=R$; Derivando: $f'(x)=\frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}=0\Rightarrow x=\pm 1$;

	$(-\infty,-1)$	$(-1,1)$	$(1,\infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	Decrece ↘	Crece ↗	Decrece ↘

Así $\boxed{\left(-1,\dfrac{5}{2}\right)}$ mínimo; $\boxed{\left(1,\dfrac{7}{2}\right)}$ $x=1$ máximo

Derivando de nuevo $f''(x)=\dfrac{2x^3-6x}{(x^2+1)^3}=0 \Rightarrow x=\left\langle \begin{array}{l} 0 \\ \pm\sqrt{3} \end{array}\right.$

	$(-\infty,-\sqrt{3})$	$(-\sqrt{3},0)$	$(0,\sqrt{3})$	$(\sqrt{3},\infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	Convexa $\cap$	Cóncava $\cup$	Convexa $\cap$	Cóncava $\cup$

Los puntos $\boxed{\left(-\sqrt{3},\dfrac{11\sqrt{3}}{4}\right)}$ y $\boxed{\left(\sqrt{3},\dfrac{5\sqrt{3}}{4}\right)}$ son de inflexión

b) $F'(x)=\dfrac{3x^2+x+3}{x^2+1} \Rightarrow F(x)=\displaystyle\int \dfrac{3x^2+x+3}{x^2+1}\,dx=$ dividiendo $=\displaystyle\int\left(3+\dfrac{x}{x^2+1}\right)dx=3x+\int\left(\dfrac{x}{x^2+1}\right)dx=$

$=3x+\dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$; Como $F(0)=4 \Rightarrow \dfrac{1}{2}\ln(1)+C=4 \Rightarrow C=4$, luego $\boxed{F(x)=3x+\dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)+4}$

---

64) a) Monotonía:

	$(-\infty,0)$	$(0,2)$	$(2,\infty)$
$g'(x)$	$+$	$-$	$+$
$g(x)$	Crece $\nearrow$	Decrece $\searrow$	Crece $\nearrow$

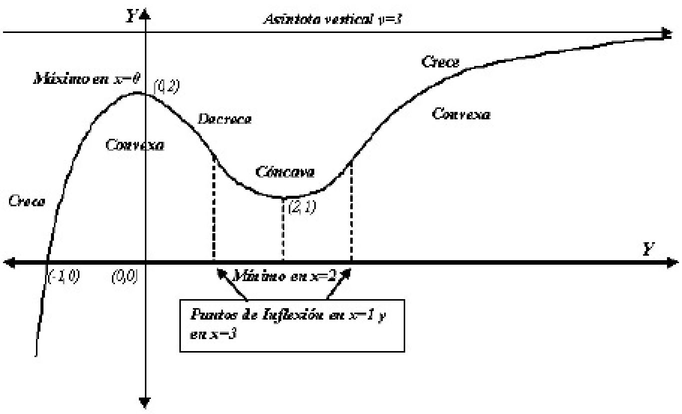
En $x=0$ hay un máximo, y en $x=2$ un mínimo

Concavidad-Convexidad

	$(-\infty,1)$	$(1,3)$	$(3,\infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	Convexa $\cap$	Cóncava $\cup$	Convexa $\cap$

En $x=1$ y en $x=3$ hay dos puntos de inflexión.

Asíntotas.- Como $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=3 \Rightarrow y=3$ es asíntota horizontal



b) $G(x)=\displaystyle\int_0^x g(x)\,dx$, si $G'(x_0)=0 \Rightarrow g(x_0)=0 \Rightarrow \boxed{x_0=-1}$

---

65) a) $\lim_{x\to+\infty}\left(e^x - x^2\right) = \infty - \infty = \lim_{x\to+\infty} e^x\left(1-\frac{x^2}{e^x}\right) = \lim_{x\to+\infty} e^x = \boxed{+\infty}$

Ya que $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{e^x}\right) = \frac{\infty}{\infty} = L'Hop = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x}{e^x}\right) = \frac{\infty}{\infty} = L'Hop = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{e^x}\right) = 0$

b) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4^x+5^x}{3^x+6^x}\right) = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\frac{4^x}{6^x}+\frac{5^x}{6^x}}{\frac{3^x}{6^x}+\frac{6^x}{6^x}}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\left(\frac{4}{6}\right)^x+\left(\frac{5}{6}\right)^x}{\left(\frac{3}{6}\right)^x+\left(\frac{6}{6}\right)^x}\right) = \frac{0}{1} = \boxed{0}$

---

66) $f(x) = x\cdot(\ln(x))^2$; $D=(0,+\infty)$; Derivando: $f'(x) = 2\ln(x) + (\ln(x))^2 = 0 \Rightarrow \ln(x)\cdot\left(2+\ln(x)\right) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \left\langle \begin{array}{l} \ln(x)=0 \Rightarrow x=1 \\ 2+\ln(x)=0 \Rightarrow x=e^{-2} \end{array}\right.$

	$(0,e^{-2})$	$(e^{-2},1)$	$(1,\infty)$
$f'(x)$	+	−	+
$f(x)$	Creciente ↗	Decreciente ↘	Creciente ↗

Se tiene que $\boxed{(e^{-2},4e^{-2})}$ es un máximo y $\boxed{(1,0)}$ es un mínimo.

Calculando la segunda derivada: $f''(x) = 2\ln(x)\cdot\frac{1}{x} + \frac{2}{x} = 0 \Rightarrow \frac{2}{x}.\left(1+\ln(x)\right) = 0 \Rightarrow \ln(x) = -1 \Rightarrow x = e^{-1}$

	$(0,e^{-1})$	(e^{-1},∞)
$f''(x)$	−	+
$f(x)$	Convexa ∩	Cóncava ∪

El punto $\boxed{(e^{-1},e^{-1})}$ es de inflexión

---

67) a) $A(c) = \int_0^1 \left(cx^4 + \frac{1}{c}x^2 + 1\right)dx = \left[\frac{cx^5}{5} + \frac{x^3}{3c} + x\right]_0^1 = \frac{c}{5} + \frac{1}{3c} + 1 \Rightarrow \boxed{A(c) = \frac{3c^2+15c+5}{15c}}$

b) $A(c) = \frac{c}{5} + 1 + \frac{1}{3c} \Rightarrow A'(c) = \frac{1}{5} - \frac{1}{3c^2} = 0 \Rightarrow 3c^2 = 5 \Rightarrow c^2 = \frac{5}{3} \Rightarrow$ como $c>0$, $\boxed{c=\sqrt{\frac{5}{3}}}$

---

68) a) $f(x) = \frac{x^2+1}{e^x}$; $D=R$; Derivando: $f'(x) = \frac{-(x-1)^2}{e^x} = 0 \Rightarrow x-1=0 \Rightarrow x=1$

Como $f'(x)<0$ la función es siempre decreciente.

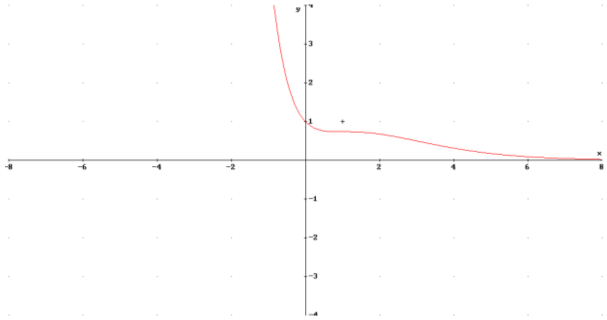
Derivando de nuevo: $f''(x) = \frac{x^2-4x+3}{e^x} = 0 \Rightarrow x^2-4x+3=0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=3 \end{cases}$

	$(-\infty,1)$	$(1,3)$	$(3,\infty)$
$f''(x)$	+	−	+
$f(x)$	Cóncava ∪	Convexa ∩	Cóncava ∪

Los puntos $\boxed{\left(1,\frac{2}{e}\right)}$ y $\boxed{\left(3,\frac{10}{e^3}\right)}$ son de inflexión

<u>Asíntotas</u>.- No tiene verticales.

Horizontales: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{e^x}\right)=\dfrac{\infty}{\infty}=L'Hop=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x}{e^x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2}{e^x}\right)=0$, luego $y=0$



b) $\displaystyle\int\left(\frac{x^2+1}{e^x}\right)dx=\text{por partes}=\left\{\begin{matrix}u=x^2+1\Rightarrow du=2xdx\\ dv=e^{-x}dx\Rightarrow v=-e^{-x}\end{matrix}\right\}=-e^{-x}(x^2+1)+\int 2xe^{-x}\,dx=-e^{-x}(x^2+1)+I$

$\displaystyle I=\int 2xe^{-x}\,dx=\text{por partes de nuevo}=\left\{\begin{matrix}u=2x\Rightarrow du=2dx\\ dv=e^{-x}dx\Rightarrow v=-e^{-x}\end{matrix}\right\}=-2xe^{-x}+\int 2e^{-x}dx=-2xe^{-x}-2e^{-x}+C$

Luego $\displaystyle\int\left(\frac{x^2+1}{e^x}\right)dx=-e^{-x}(x^2+1)-2xe^{-x}-2e^{-x}+C=-(x^2+2x+3)e^{-x}+C$

Por tanto: $\displaystyle\int_0^1\left(\frac{x^2+1}{e^x}\right)dx=\left[-(x^2+2x+3)e^{-x}\right]_0^1=-(1+2+3)e^{-1}+3=\boxed{\left(3-\frac{6}{e}\right)}$

---

69) a) $\displaystyle\int x^3\ln(x)\,dx=\text{por partes}=\left\{\begin{matrix}u=\ln(x)\Rightarrow du=\frac{1}{x}dx\\ dv=x^3dx\Rightarrow v=\frac{x^4}{4}\end{matrix}\right\}=\frac{x^4}{4}\ln(x)-\int\frac{x^4}{4}\cdot\frac{1}{x}dx=\frac{x^4}{4}\ln(x)-\int\frac{x^3}{4}dx=$

$=\boxed{\dfrac{x^4\ln(x)}{4}-\dfrac{x^4}{16}+C}$

b) $\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{4+x^2}}dx=\text{Cambio}\left\{\begin{matrix}x=e^t-e^{-t}\\ dx=(e^t+e^{-t})\,dt\end{matrix}\right\}=\int\frac{e^t+e^{-t}}{\sqrt{4+(e^t-e^{-t})^2}}dt=\int\frac{e^t+e^{-t}}{\sqrt{4+e^{2t}+e^{-2t}-2e^te^{-t}}}dt=$

$\displaystyle=\int\frac{e^t+e^{-t}}{\sqrt{2+e^{2t}+e^{-2t}}}dt=\int\frac{e^t+e^{-t}}{\sqrt{(e^t+e^{-t})^2}}dt=\int\frac{e^t+e^{-t}}{e^t+e^{-t}}dt=\int dt=t+C=\text{deshaciendo el cambio}=$

$=\boxed{\ln\left(\dfrac{x+\sqrt{x^2+4}}{2}\right)+C}$

---

70) Sea $A=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{\alpha x^2+4x+8}\right)^{(x+1)}=1^{\infty}\ (\forall\,\alpha\,)=e^L$, con $L=\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)\left(\dfrac{1}{\alpha x^2+4x+8}\right)$

$$L=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{\alpha x^2+4x+8}\right)=\left\langle\begin{matrix}1/4 & si & \alpha=0\\ 0 & si & \alpha\neq 0\end{matrix}\right.\Rightarrow \boxed{A=\left\langle\begin{matrix}e^{1/4} & si & \alpha=0\\ 1 & si & \alpha\neq 0\end{matrix}\right.}$$

---

71) $F(x)=\int_0^x t^2\cdot e^{-t}dt$; Sea $I=\int t^2\cdot e^{-t}dt=$ Integrando por partes $=\left\{\begin{matrix}u=t^2\Rightarrow du=2t\,dt\\ dv=e^{-t}dt\Rightarrow v=-e^{-t}\end{matrix}\right\}=$

$=-t^2e^{-t}+\int 2t\,e^{-t}dt=$ Integrando de nuevo por partes $=\left\{\begin{matrix}u=2t\Rightarrow du=2\,dt\\ dv=e^{-t}dt\Rightarrow v=-e^{-t}\end{matrix}\right\}=$

$=-t^2e^{-t}-2te^{-t}+\int 2\,e^{-t}dt=-t^2e^{-t}-2te^{-t}-2e^{-t}+C=-e^{-t}(t^2+2t+2)+C$

Así $\left[-e^{-t}(t^2+2t+2)\right]_0^x=\left(-e^{-x}(x^2+2x+2)\right)-\left(-2\right)=\boxed{2-e^{-x}(x^2+2x+2)}$

---

72) a) Monotonía

$f'(x)=(x-1)^3(x-5)=0\Rightarrow\left\langle\begin{matrix}x=1\\ x=5\end{matrix}\right.$ $\boxed{\text{En } (-\infty,1) \text{ crece, en } (1,5) \text{ decrece, en } (5,+\infty) \text{ crece}}$

b) Máximos y mínimos

Según la monotonía en $\boxed{x=1}$ hay un máximo, y en $\boxed{x=5}$ hay un mínimo

Puntos de Inflexión

$f''(x)=4(x-1)^2(x-4)=0\Rightarrow\left\langle\begin{matrix}x=1\\ x=4\end{matrix}\right.$. Como en $x=1$ hay un máximo luego no puede ser punto de inflexión. $f'''(x)=12(x-1)(x-3)=0\Rightarrow f'''(4)=36\neq 0$, luego en $\boxed{x=4}$ hay un punto de inflexión

c) Si $f'(x)=(x-1)^3(x-5)=x^4-8x^3+18x^2-16x+5\Rightarrow f(x)=\int(x^4-8x^3+18x^2-16x+5)\,dx\Rightarrow$

$\Rightarrow f(x)=\frac{x^5}{5}-\frac{8x^4}{4}+\frac{18x^3}{3}-\frac{16x^2}{2}+5x+C=\frac{x^5}{5}-2x^4+6x^3-8x^2+5x+C$. Como $f(0)=0$,

$C=0$, luego $\boxed{f(x)=\frac{x^5}{5}-2x^4+6x^3-8x^2+5x}$

---

73) Sea $f(x)=\left\{\begin{matrix}\frac{\ln(1+ax)-bx}{x^2} & si & 1+ax>0,\ x\neq 0\\ -\frac{1}{2} & si & x=0\end{matrix}\right.$

a) Para que la función sea continua en $x=0$, se debe cumplir que $\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)=-\frac{1}{2}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+ax)-bx}{x^2}=\frac{0}{0}=L'H=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{a}{1+ax}-b}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{a-b(1+ax)}{2x(1+ax)}=\lim_{x\to 0}\frac{a-b-abx}{2x(1+ax)}$$

- Si $a \neq b \Rightarrow \lim\limits_{x \to 0} f(x) = \dfrac{a-b}{0} = \pm\infty$ (No sería continua)

- Si $a = b \Rightarrow \lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{a - a - a^2 x}{2x(1+ax)} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{-a^2 x}{2x + 2ax^2} = \dfrac{0}{0} = L'H = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{-a^2}{2+4ax} = -\dfrac{a^2}{2}$

Si la función es continua $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\dfrac{a^2}{2} = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow a^2 = 1$. Luego $\boxed{a = b = -1}$ ó $\boxed{a = b = 1}$

b) Sea $a = b = 1 \Rightarrow f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+x) - x}{x^2} & si \quad x > -1,\ x \neq 0 \\ -\dfrac{1}{2} & si \quad x = 0 \end{cases}$

Estudiamos derivabilidad en $x = 0$:

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{\ln(1+x) - x}{x^2} + \frac{1}{2}}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{2\ln(1+x) - 2x + x^2}{2x^2}}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{2\ln(1+x) - 2x + x^2}{2x^3} =$$

$$= \frac{0}{0} = L'H = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{2}{1+x} - 2 + 2x}{6x^2} = \frac{0}{0} = L'H = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{-2}{(1+x)^2} + 2}{12x} = \frac{0}{0} = L'H = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{4}{(1+x)^3}}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

Luego la función es derivable en $x = 0$, y $\boxed{f'(0) = \dfrac{1}{3}}$

---

74) Sea $f(x) = \dfrac{x}{1 - x^2}$

a) Si la pendiente de la recta tangente es 1 $\Rightarrow f'(x) = 1$. Derivando: $f'(x) = \dfrac{x^2 + 1}{(1 - x^2)^2}$

Si $f'(x) = 1 \Rightarrow \dfrac{x^2 + 1}{(1 - x^2)^2} = 1 \Rightarrow x^2 + 1 = (1 - x^2)^2 \Rightarrow x^2 + 1 = 1 - 2x^2 + x^4 \Rightarrow x^4 - 3x^2 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2(x^2 - 3) = 0 \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{3} \end{array}}$

b) Ecuación de la recta tangente en $x = 0$, $y - f(0) = f'(0)(x - 0) \Rightarrow y - 0 = 1 \cdot x \Rightarrow \boxed{y = x}$

c) Por el TVM de Lagrange: Existe un $c \in (0,2)$ tal que: $g'(c) = \dfrac{g(2) - g(0)}{2 - 0} = \dfrac{2 - 0}{2} = 1$

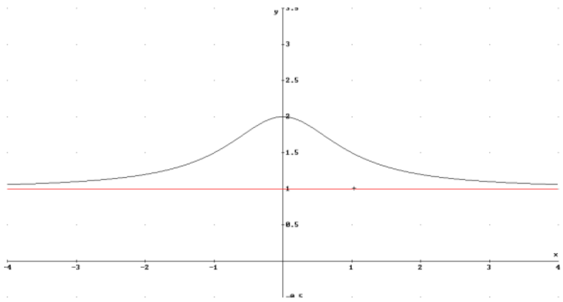
---

75) Sea la función: $f(x) = \dfrac{x^2 + 2}{x^2 + 1} \qquad D = R$

a) Derivando: $f'(x)=\dfrac{-2x}{(x^2+1)^2}=0\Rightarrow x=0$ $\boxed{\text{En } (-\infty,0) \text{ crece, en } (0,+\infty) \text{ decrece}}$

b) Derivando de nuevo $f''(x)=\dfrac{6x^2-2}{(x^2+1)^3}=0\Rightarrow x=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ $\boxed{\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{7}{4}\right) \text{ y } \left(\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{7}{4}\right) \text{puntos de inflexión}}$

$\boxed{\text{En } \left(-\infty,-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) \text{ es } \cup \text{, en } \left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) \cap \text{, en } \left(\dfrac{\sqrt{3}}{3},+\infty\right) \cup}$

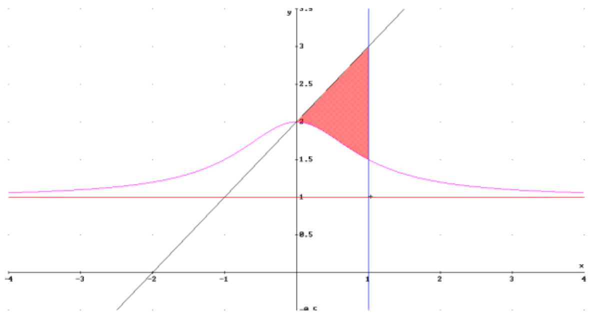


c) Solo tiene una asíntota horizontal: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2+2}{x^2+1}\right)=1$

$y=1$ es asíntota.

d) Area $\displaystyle\int_0^1\left(x+2-\frac{x^2+2}{x^2+1}\right)dx=\int_0^1\left(x+1-\frac{1}{x^2+1}\right)dx=$

$$=\left[\frac{x^2}{2}+x-arctg\,x\right]_0^1=\frac{1}{2}+1-arctg\,1=\boxed{\frac{3}{2}-\frac{\pi}{4}}$$



---

76) Sea la función: $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x}\ln x}{2^x} & si \quad x>0\\ x+k & si \quad x\le 0\end{cases}$,

a) Para que sea continua en R estudiamos lo que ocurre en $x=0$

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0}(x+k)=k$$

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x}\ln x}{2^x}=\frac{0\cdot(-\infty)}{1}=\lim_{x\to0}\left(\frac{\ln x}{\frac{2^x}{\sqrt{x}}}\right)=\frac{-\infty}{+\infty}=L'H=\lim_{x\to0}\frac{1/x}{\dfrac{2^x\ln2\cdot\sqrt{x}-\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot2^x}{x}}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{2^x\ln2\cdot\sqrt{x}-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\cdot2^x}=\lim_{x\to0}\frac{2\sqrt{x}}{2^{x+1}\ln2\cdot x-2^x}=\frac{0}{-1}=0$$

Igualando límites laterales: $\boxed{k=0}$

b) <u>Corte con el eje OY</u>.- Sea $x=0\Rightarrow y=k=0$, luego $\boxed{(0,0)}$

<u>Corte con el eje OX</u>.- Sea $y=0\Rightarrow\dfrac{\sqrt{x}\ln x}{2^x}=0\Rightarrow x=1$, luego $\boxed{(1,0)}$

c) Recta tangente a la gráfica de la función en $x=1$: $y-f(1)=f'(1)\cdot(x-1)$

Derivando y simplificando: $f'(x)=\dfrac{\dfrac{\ln x}{2\sqrt{x}}+\dfrac{\sqrt{x}}{x}-\ln 2\cdot\sqrt{x}\cdot\ln x}{2^x}\Rightarrow f'(1)=\dfrac{1}{2}$

Sustituyendo: $y-0=\dfrac{1}{2}\cdot(x-1)\Rightarrow \boxed{y=\dfrac{x-1}{2}}$

---

77) a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{\sqrt[3]{3+5x-8x^3}}{1+2x}\right]^{25}=\dfrac{+\infty}{+\infty}=$ dividiendo todo por x $=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{\sqrt[3]{\dfrac{3+5x-8x^3}{x^3}}}{\dfrac{1+2x}{x}}\right]^{25}=$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\sqrt[3]{\dfrac{3}{x^3}+\dfrac{5x}{x^3}-\dfrac{8x^3}{x^3}}}{\dfrac{1}{x}+2}\right]^{25}=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\sqrt[3]{\dfrac{3}{x^3}+\dfrac{5}{x^2}-8}}{\dfrac{1}{x}+2}\right]^{25}=\left[\frac{\sqrt[3]{-8}}{2}\right]^{25}=\left(\frac{-2}{2}\right)^{25}=\boxed{-1}$$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+4x^3\right)^{2/x^3}=1^{+\infty}=e^L$, con $L=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2}{x^3}\cdot 4x^3\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{8x^3}{x^3}\right)=8$; Así límite: $\boxed{e^8}$

---

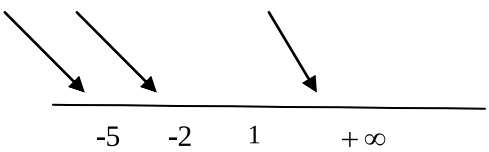
78) Sea la función $f(x)=\ln(x^2+4x-5)$

a) $D=\left\{x\in R\,\middle|\, x^2+4x-5>0\right\}$. Resolviendo la desigualdad: $x^2+4x-5>0\Rightarrow(x+5)(x-1)>0\Rightarrow$

$\Rightarrow x>1$ y $x<-5$, luego $\boxed{D=(-\infty,-5)\cup(1,+\infty)}$

<u>Asíntotas</u> Tiene dos verticales $\boxed{x=-5}$ y $\boxed{x=1}$, pues en ambos caso la función tiende a $-\infty$

b) Derivando $f'(x)=\dfrac{2x+4}{x^2+4x-5}=0\Rightarrow 2x+4=0\Rightarrow x=-2$, La función **<u>siempre decrece</u>** en su dominio de definición



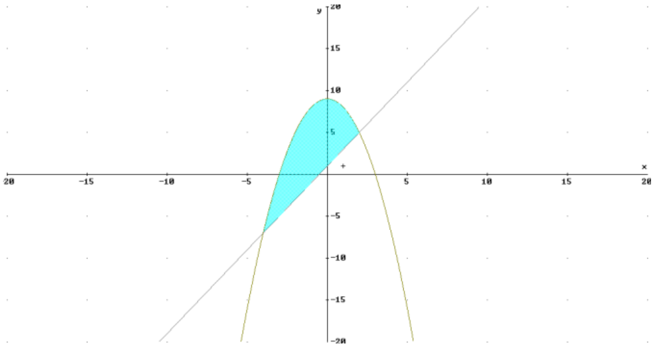
---

79) Sean las funciones $y=9-x^2$, $y=2x+1$

a) Se trata de una parábola y una recta.

- <u>Parábola</u>.- Vértice $V(0,9)$; Cortes ejes: $(-3,0),(3,0)$ y $(0,9)$

- Recta.- Corte ejes: $(-1/2{,}0),(0{,}1)$
- Cortes entre ambas.- Resolvemos el sistema: $\left\{\begin{matrix} y=9-x^2 \\ y=2x+1 \end{matrix}\right\}$, obteniendo: $A(2{,}5)$ y $B(-4,-7)$



b) $A=\int_{-4}^{2}\left(9-x^2-2x-1\right)dx=\int_{-4}^{2}\left(8-x^2-2x\right)dx=$

$$=\left[8-x^2-2x\right]_{-4}^{2}=\left[8x-\frac{x^3}{3}-x^2\right]_{-4}^{2}=\left(\frac{28}{3}\right)-\left(-\frac{80}{3}\right)=\frac{28}{3}+\frac{80}{3}=\frac{108}{3}=\boxed{36}$$

c) $V=\int_{-3}^{3}\pi\cdot\left(9-x^2\right)^2dx=2\pi\int_{0}^{3}\left(9-x^2\right)^2dx=2\pi\int_{0}^{3}\left(81+x^4-18x^2\right)dx=2\pi\cdot\left[81x+\frac{x^4}{4}-6x^3\right]_{0}^{3}=\boxed{\frac{1296\pi}{3}}$

---

80) a) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\arctan x\right)^{a/x}=1^{+\infty}=e^{L}$, con $L=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{a}{x}\cdot arctg\ x\right)=\frac{0}{0}=L'H=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\frac{a}{1+x^2}}{1}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{a}{1+x^2}\right)=a$;

Así límite: $\boxed{e^{a}}$

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x+2e^x}{7x+5e^x}=\frac{+\infty}{+\infty}=L'H=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3+2e^x}{7+5e^x}=\frac{+\infty}{+\infty}=L'H=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2e^x}{5e^x}=\boxed{\frac{2}{5}}$

---

81) a) $\int_{0}^{1}\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}dx$. Calculamos primero primitiva: $\int\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}dx=$ Cambio $t=4-x^2\Rightarrow dt=-2x\,dx$

Sustituyendo: $\int\frac{x}{\sqrt{t}}\frac{dt}{-2x}=\int-\frac{dt}{2\sqrt{t}}=-\frac{1}{2}\int-t^{-1/2}dt=-\frac{1}{2}\frac{t^{1/2}}{1/2}+C=-\sqrt{t}+C=-\sqrt{4-x^2}+C$.

Así: $\int_{0}^{1}\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}dx=\left[-\sqrt{4-x^2}\right]_{0}^{1}=-\sqrt{4-1}+\sqrt{4}=\boxed{2-\sqrt{3}}$

b) $\int_{0}^{\pi}x\cdot\cos x\,dx$. Calculamos primitiva por partes: $\left\{\begin{matrix} u=x\Rightarrow du=dx \\ dv=\cos x\cdot dx\Rightarrow v=sen\ x \end{matrix}\right\}\Rightarrow$

$$\Rightarrow\int x\cdot\cos x\,dx=x\cdot sen\ x-\int sen\ x\,dx=x\cdot sen\ x+\cos x+C$$. Con lo que:

$$\int_0^{\pi} x\cdot\cos x\,dx=\left[x\cdot sen\,x+\cos x\right]_0^{\pi}=(\pi\cdot sen\,\pi+\cos\pi)-(0\cdot sen\,0+\cos 0)=-1-1=\boxed{-2}$$

---

82) Formamos $\overrightarrow{PQ}=(1,-1,0)$ y $\overrightarrow{PA}=(a-1,-2,-1)$. Así el plano pedido será $\pi:\begin{vmatrix}x-1 & y-2 & z-1\\ 1 & -1 & 0\\ a-1 & -2 & -1\end{vmatrix}=0\Rightarrow$

$\Rightarrow \pi: x+y+(a-3)z-a=0$

- Sea $B=\pi\cap OY\Rightarrow\left\{\begin{matrix}x=0\\ z=0\end{matrix}\right\}\Rightarrow y=a\Rightarrow B=(0,a,0)$
- Sea $C=\pi\cap OZ\Rightarrow\left\{\begin{matrix}x=0\\ y=0\end{matrix}\right\}\Rightarrow z=\dfrac{a}{a-3}\Rightarrow C=\left(0,0,\dfrac{a}{a-3}\right)$

Volumen tetraedro: $V(a)=\dfrac{1}{6}=\cdot\left\|\begin{matrix}a & 0 & 0\\ 0 & a & 0\\ 0 & 0 & \dfrac{a}{a-3}\end{matrix}\right\|=\dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{a^3}{a-3}$. Derivando: $V'(a)=\dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{2a^3-9a^2}{(a-3)^2}$

Igualando a cero: $V'(a)=0\Rightarrow\dfrac{2a^3-9a^2}{(a-3)^2}=0\Rightarrow 2a^3-9a^2=0\Rightarrow a^2(2a-9)=0\Rightarrow\left\langle\begin{matrix}a=0\\ a=9/2\end{matrix}\right.$

Como $a>3$, $\boxed{a=\dfrac{9}{2}}$

---

83) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-3}{x^2+3}\right)^{ax^2}=1^{+\infty}=e^L$, con $L=\lim\limits_{x\to 0}ax^2\left(\dfrac{x^2-3}{x^2+3}-1\right)=\lim\limits_{x\to 0}ax^2\left(\dfrac{-6}{x^2+3}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{-6ax^2}{x^2+3}\right)=-6a$

Luego $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-3}{x^2+3}\right)^{ax^2}=e^{-6a}$. Como además el límite vale 4, $e^{-6a}=4\Rightarrow -6a=\ln 4\Rightarrow\boxed{a=-\dfrac{\ln 4}{6}}$

---

84) a) $\displaystyle\int_{14}^{16}(x-15)^8\,dx=\left[\frac{(x-15)^9}{9}\right]_{14}^{16}=\frac{(16-15)^9}{9}-\frac{(14-15)^9}{9}=\frac{1}{9}-\left(-\frac{1}{9}\right)=\boxed{\frac{2}{9}}$

b) $\displaystyle\int_9^{11}(x-10)^{19}(x-9)\,dx$. Calculamos primitiva por partes: $\left\{\begin{matrix}u=x-9\Rightarrow du=dx\\ dv=(x-10)^{19}dx\Rightarrow v=\dfrac{(x-10)^{20}}{20}\end{matrix}\right\}\Rightarrow$

$$\int(x-10)^{19}(x-9)\,dx=(x-9)\cdot\frac{(x-10)^{20}}{20}-\int\frac{(x-10)^{20}}{20}\,dx=\frac{(x-9)\cdot(x-10)^{20}}{20}-\frac{(x-10)^{21}}{20\cdot 21}$$

Así: $\displaystyle\int_9^{11}(x-10)^{19}(x-9)\,dx=\left[\frac{(x-9)\cdot(x-10)^{20}}{20}-\frac{(x-10)^{21}}{20\cdot 21}\right]_0^{11}=\left(\frac{(11-9)\cdot(11-10)^{20}}{20}-\frac{(11-10)^{21}}{20\cdot 21}\right)-$

$$-\left(\frac{(9-9)\cdot(9-10)^{20}}{20}-\frac{(9-10)^{21}}{20\cdot 21}\right)=\left(\frac{2}{20}-\frac{1}{20\cdot 21}\right)-\left(\frac{1}{20\cdot 21}\right)=\frac{1}{10}-\frac{2}{20\cdot 21}=\frac{1}{10}-\frac{1}{10\cdot 21}=\frac{21-1}{10\cdot 21}=$$

$$=\frac{20}{10\cdot 21}=\boxed{\frac{2}{21}}$$

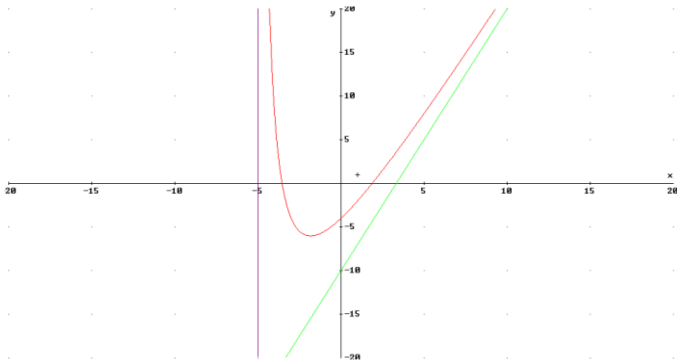
---

85) Sea la función: $f(x)=\dfrac{3x^2+5x-20}{x+5}$

a) Asíntotas.-

- Verticales.- $\boxed{x=-5}$.
- Horizontales.- $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+5x-20}{x+5}=+\infty$. No tiene
- Oblicuas.- $\displaystyle m=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+5x-20}{x^2+5x}=3$; $\displaystyle n=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2+5x-20}{x+5}-3x\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{-10x-20}{x+5}\right)=-10$

  Luego la recta: $\boxed{y=3x-10}$



b) Derivando : $f'(x)=\dfrac{3x^2+30x-45}{(x+5)^2}$, derivando de nuevo: $f''(x)=\dfrac{60}{(x+5)^3}$, luego:

	$(-\infty,-5)$	$(-5,\infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	convexa $\bigcap$	cóncava $\bigcup$

---

86) a) Para calcular $\displaystyle\int_1^3 x\cdot\sqrt{4+5x^2}\,dx$ primero calculamos primitiva: $\displaystyle\int x\cdot\sqrt{4+5x^2}\,dx$

Cambio $t=4+5x^2\Rightarrow dt=10x\,dx\Rightarrow dx=\dfrac{dt}{10x}$

Sustituyendo: $\displaystyle\int x\cdot\sqrt{4+5x^2}\,dx=\int x\cdot\sqrt{t}\cdot\frac{dt}{10x}=\int\frac{1}{10}\cdot\sqrt{t}\cdot dt=\frac{1}{10}\cdot\frac{t^{3/2}}{3/2}+C=$ deshaciendo el cambio

$$=\frac{1}{15}\cdot(5x^2+4)^{3/2}+C$$

Luego $\int_1^2 x\cdot\sqrt{4+5x^2}\,dx = \left[\frac{(5x^2+4)^{3/2}}{15}\right]_1^3 = \frac{(49)^{3/2}}{15} - \frac{(9)^{3/2}}{15} = \frac{7^3}{15} - \frac{3^3}{15} = \boxed{\frac{316}{15}}$

b) Sea $f(x)=\sqrt{12-3x^2}$. Hallamos su dominio: $12-3x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 4 \Rightarrow D=[-2,2]$

Derivando: $f'(x)=\frac{-6x}{2\sqrt{12-3x^2}}=\frac{-3x}{\sqrt{12-3x^2}}=0\Rightarrow x=0$

	$(-2,0)$	$(0,2)$
$f'(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$

Como se aprecia en el cuadro $\boxed{(0,\sqrt{12})}$ es un máximo relativo. Ahora bien , $f(-2)=f(2)=0$, luego también es máximo absoluto.

Los mínimos absolutos serán $\boxed{(-2,0)}$ y $\boxed{(2,0)}$

---

87) a) $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}=\frac{+\infty}{+\infty}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}}{\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{\frac{x}{x}}}{\sqrt{\frac{x}{x}+\sqrt{\frac{x}{x^2}}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}}}}=\boxed{1}$

b) Consideremos $f(x)=4x^5+3x+m$ que al ser polinómica es continua y derivable en R

Tomando límites: $\lim_{x\to-\infty}(4x^5+3x+m)=-\infty$ (por ser de grado impar)

: $\lim_{x\to+\infty}(4x^5+3x+m)=-+\infty$

Aplicando el Teorema de Bolzano existirá un $c\in(-\infty,+\infty)$ tal que $f(c)=0$. Luego tendrá al menos una raíz real. Pero $f'(x)=20x^4+3>0$, luego $f(x)$ será siempre creciente en R, luego la raíz es única (Teorema de Rolle)

---

88) Sea $f(x)=\frac{ax^4+1}{x^3}$, $D=R-\{0\}$. Derivando: $f'(x)=\frac{ax^6-3x^2}{x^6}=\frac{ax^4-3}{x^4}$

a) Como en $x=1$ tiene un mínimo relativo $f'(1)=0\Rightarrow\frac{a-3}{1}=0\Rightarrow\boxed{a=3}$

Sustituyendo $a=3$, $f(x)=\frac{3x^4+1}{x^3}\Rightarrow f'(x)=\frac{3x^4-3}{x^4}=0\Rightarrow x^4=1\Rightarrow x=\pm1$

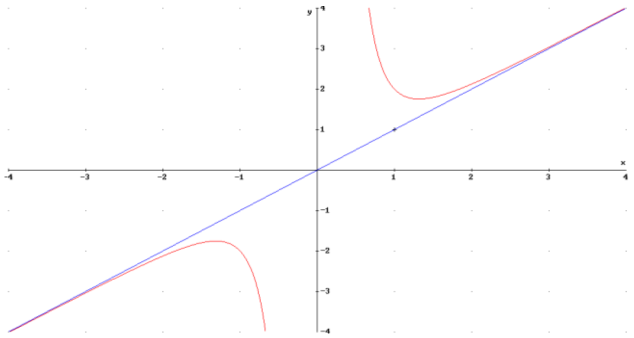
Derivando de nuevo: $f''(x)=\frac{12}{x^5}\Rightarrow f''(-1)=-12<0\Rightarrow\boxed{x=-1}$ máximo relativo

b) Si $a=1\Rightarrow f(x)=\frac{x^4+1}{x^3}$. Es claro que $\boxed{x=0}$ es asíntota vertical. Veamos si tiene oblicuas:

$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^4+1}{x^4}=1$; $n=\lim_{x\to\infty}(f(x)-mx)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^4+1}{x^3}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x^3}\right)=0\Rightarrow\boxed{y=x}$

es asíntota oblicua.

c) Representación gráfica: Teniendo en cuenta lo anterior:



---

89) a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{4+e^{-(x+1)}} = \dfrac{2}{4+e^{-\infty}} = \dfrac{2}{4} = \boxed{\dfrac{1}{2}}$; $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2}{4+e^{-(x+1)}} = \dfrac{2}{4+e^{+\infty}} = \dfrac{2}{4+\infty} = \dfrac{2}{+\infty} = \boxed{0}$

b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{1+3x^2}\,dx$ primero calculamos primitiva: $\displaystyle\int \frac{x}{1+3x^2}\,dx$

Cambio $t = 1+3x^2 \Rightarrow dt = 6x\,dx \Rightarrow dx = \dfrac{dt}{6x}$

Sustituyendo: $\displaystyle\int \frac{x}{1+3x^2}\,dx = \int x\cdot\frac{1}{t}\cdot\frac{dt}{6x} = \int \frac{1}{6}\cdot\frac{dt}{t} = \frac{1}{6}\cdot\ln t + C =$ deshaciendo el cambio $\dfrac{1}{6}\cdot\ln(1+3x^2)+C$

Así: $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{1+3x^2}\,dx = \left[\frac{1}{6}\cdot\ln\left(1+3x^2\right)\right]_0^1 = \frac{1}{6}(\ln 4 - \ln 1) = \frac{\ln 4}{6} = \boxed{\frac{\ln 2}{3}}$

c) Sea $f(x) = \sqrt{x^2-9x+14}$ Hallamos su dominio: $x^2-9x+14 \geq 0 \Rightarrow (x-2)(x-7) \geq 0$, luego:

$$\boxed{D = (-\infty,2] \cup [7,+\infty)}$$

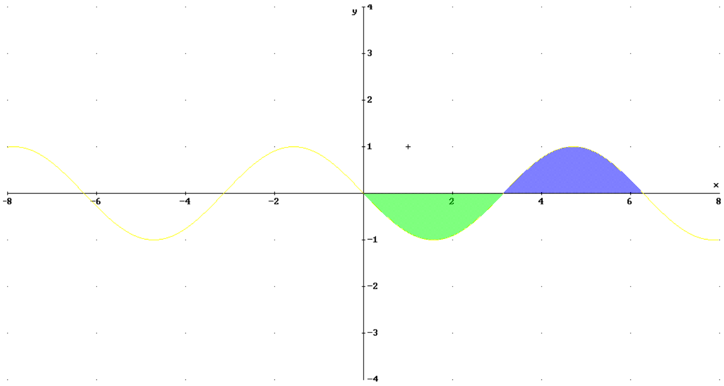
$f(x) = \sqrt{x^2-9x+14}$ es derivable en $\boxed{(-\infty,2)\cup(7,+\infty)}$

---

90) Sea $f(x) = \begin{cases} e^{1/x} & si \quad x<0 \\ k & si \quad x=0 \\ \dfrac{\cos x - 1}{sen\ x} & si \quad x>0 \end{cases}$ Estudiemos continuidad en $x=0$

- $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} e^{1/x} = 0$; $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - 1}{sen\ x} = \dfrac{0}{0} = L'H = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-sen\ x}{\cos x} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$
- $f(0) = k$.
- Para que sea continua $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0) = k \Rightarrow \boxed{k = 0}$

91) a) Sea $f(x) = -sen\ x$



$$A = -\int_0^{\pi} (-sen\ x)\cdot dx + \int_{\pi}^{2\pi} (-sen\ x)\cdot dx =$$

$$= 2\int_0^{\pi} sen\ x \cdot dx = 2\left[-\cos x\right]_0^{\pi} =$$

$$= 2(-\cos\pi + \cos 0) = 2\cdot 2 = \boxed{4}$$

b) $V = 2\pi \int_0^{\pi} (-sen\ x)^2 \cdot dx = 2\pi \int_0^{\pi} sen^2\ x \cdot dx =$

$$= 2\pi \int_0^{\pi} \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)\cdot dx = \pi \int_0^{\pi} (1-\cos 2x)\cdot dx = = \left[x - \frac{sen(2x)}{2}\right]_0^{\pi} = \boxed{\pi^2}$$

---

92) Sea $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, derivando: $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \Rightarrow f''(x) = 6x + 2a$

- $f'(1) = 0 \Rightarrow 3 + 2a + b = 0$
- $f(1) = 2 \Rightarrow 1 + a + b + c = 2$
- $f''(3) = 0 \Rightarrow 18 + 2a = 0$

Resolviendo el sistema $\boxed{a = -9}$, $\boxed{b = 15}$, $\boxed{c = -5}$

---

93) a) Sea $I = \int e^{2x} \cos x\ dx$. Calculamos primitiva por partes: $\left\{\begin{matrix} u = e^{2x} \Rightarrow du = 2e^{2x}dx \\ dv = \cos x \cdot dx \Rightarrow v = sen\ x \end{matrix}\right\} \Rightarrow$

$$I = sen\ x \cdot e^{2x} - \int 2e^{2x}\cdot sen\ x\ dx = sen\ x \cdot e^{2x} - I_2$$

Calculamos por separado $I_2 = \int 2e^{2x}\cdot sen\ x\ dx =$ por partes: $\left\{\begin{matrix} u = 2e^{2x} \Rightarrow du = 4e^{2x}dx \\ dv = sen\ x \cdot dx \Rightarrow v = -\cos x \end{matrix}\right\} \Rightarrow$

$I_2 = -2e^{2x}\cos x + \int 4e^{2x}\cdot \cos x\ dx = -2e^{2x}\cos x + 4\int e^{2x}\cdot \cos x\ dx$. Sustituyendo en la expresión de I

$$I = sen\ x \cdot e^{2x} - I_2 = sen\ x \cdot e^{2x} + 2e^{2x}\cos x - 4\int e^{2x} \cdot \cos x\, dx = sen\ x \cdot e^{2x} + 2e^{2x}\cos x - 4I$$

Es decir, $I = sen\ x \cdot e^{2x} + 2e^{2x}\cos x - 4I \Rightarrow 5I = sen\ x \cdot e^{2x} + 2e^{2x}\cos x = (sen\ x + 2\cos x)\cdot e^{2x} \Rightarrow$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{5}(sen\ x + 2\cos x)\cdot e^{2x} + C$$

Calculamos ahora la integral definida:

$$\int_0^{\pi} e^{2x}\cos x\, dx = \left[\frac{1}{5}(sen\ x + 2\cos x)\cdot e^{2x}\right]_0^{\pi} = \left(\frac{1}{5}(sen\ \pi + 2\cos\pi)\cdot e^{2\pi}\right) - \left(\frac{1}{5}(sen\ 0 + 2\cos 0)\cdot e^{0}\right) =$$

$$= -\frac{2}{5}e^{2\pi} - \frac{2}{5} = \boxed{-\frac{2}{5}(e^{2\pi}+1)}$$

b) Sea $\displaystyle\int \frac{sen\ 2x}{1+\cos^2 2x}dx$. Realizamos el cambio de variable $\cos 2x = t \Rightarrow -2sen\ 2x \cdot dx = dt \Rightarrow dx = -\dfrac{dt}{2sen\ 2x}$

Sustituyendo: $\displaystyle\int \frac{sen\ 2x}{1+\cos^2 2x}dx = \int \frac{sen\ 2x}{1+t^2}\cdot\frac{-dt}{2sen\ 2x} = -\frac{1}{2}\int\frac{dt}{1+t^2} = -\frac{1}{2}arctg\ t + C =$

deshaciendo el cambio $-\dfrac{1}{2}arctg(\cos 2x) + C$

Así: $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{sen\ 2x}{1+\cos^2 2x}dx = \left[-\frac{1}{2}arctg(\cos 2x)\right]_0^{\pi/2} = \left(-\frac{1}{2}arctg(\cos\pi)\right) - \left(-\frac{1}{2}arctg(\cos 0)\right) =$

$$= \left(-\frac{1}{2}arctg(-1)\right) - \left(-\frac{1}{2}arctg(1)\right) = -\frac{1}{2}\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{8} = \boxed{\frac{\pi}{4}}$$

---

94) a) Sea $f(x) = \dfrac{3x + \ln(x+1)}{\sqrt{x^2-3}}$.

$D(\ln(x+1)) = (-1,+\infty)$; $D(\sqrt{x^2-3}) = (-\infty,-\sqrt{3})\cup(\sqrt{3},+\infty)$. Dominio total: $\boxed{D = (\sqrt{3},+\infty)}$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x+\ln(x+1)}{\sqrt{x^2-3}} = \frac{+\infty}{+\infty} = L'H = \lim_{x\to+\infty}\frac{3+\dfrac{1}{x+1}}{\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2-3}}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{3+\dfrac{1}{x+1}}{\dfrac{x}{\sqrt{x^2-3}}} = \frac{3+0}{1} = \boxed{3}$$

b) Sea $g(x) = (\ln x)^x$, tomando logaritmos: $\ln(g(x)) = \ln\left((\ln x)^x\right) = x\ln(\ln x)$

Derivando: $\dfrac{g'(x)}{g(x)} = \ln(\ln x) + x\cdot\dfrac{1/x}{\ln x} = \ln(\ln x) + \dfrac{1}{\ln x} \Rightarrow g'(x) = g(x)\cdot\left(\ln(\ln x) + \dfrac{1}{\ln x}\right) =$

$$= (\ln x)^x \cdot \left(\ln(\ln x) + \frac{1}{\ln x} \right) \Rightarrow g'(e) = (\ln e)^e \left(\ln(\ln e) + \frac{1}{\ln e} \right) = \ln 1 + 1 = \boxed{1}$$

c) Sea $h(x) = sen(\pi - x)$

Puntos de corte con OX.- $sen(\pi - x) = 0 \Rightarrow \left\langle \begin{matrix} \pi - x = 0 \\ \pi - x = \pi \end{matrix} \right. \Rightarrow \left\langle \begin{matrix} x = \pi \\ x = 0 \end{matrix} \right.$, luego $\boxed{(0,0)\,,\,(\pi,0)}$

Extremos Relativos.- $h'(x) = -\cos(\pi - x) = 0 \Rightarrow \cos(\pi - x) = 0 \Rightarrow \left\langle \begin{matrix} \pi - x = \pi/2 \\ \pi - x = 3\pi/2 \end{matrix} \right. \Rightarrow \left\langle \begin{matrix} x = \pi/2 \\ x = -\pi/2 = 3\pi/2 \end{matrix} \right.$

Derivando de nuevo : $h''(x) = -sen(\pi - x) \Rightarrow \left\langle \begin{matrix} -sen(\pi - \pi/2) = -sen(\pi/2) = -1 < 0 \\ -sen(\pi - 3\pi/2) = -sen(-\pi/2) = 1 > 0 \end{matrix} \right.$

Luego: $\boxed{x = \frac{\pi}{2} \text{ es máximo}}$ y $\boxed{x = \frac{3\pi}{2} \text{ es mínimo}}$

---

95) Sea la función $f(x) = \begin{cases} 3x + A & si\ x \le 3 \\ -4 + 10x - x^2 & si\ x > 3 \end{cases}$

a) Estudiemos continuidad en $x = 3$

- $\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3} (3x + A) = 9 + A$; $\lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3} (-4 + 10x - x^2) = 17$
- Imponiendo continuidad $\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^+} f(x) \Rightarrow 9 + A = 17 \Rightarrow \boxed{A = 8}$

Derivabilidad .- Derivando la función: $f'(x) = \begin{cases} 3 & si\ x < 3 \\ 10 - 2x & si\ x > 3 \end{cases}$

Evaluando derivadas laterales: $f'(3^+) = (10 - 2x)_{x=3} = 4$; $f'(3^-) = 3$, con lo que **no es derivable**

b) $f'(x) = \begin{cases} 3 & si\ x < 3 \\ 10 - 2x & si\ x > 3 \end{cases}$. Si $f'(x) = 0 \Rightarrow 10 - 2x = 0 \Rightarrow x = 5$, como $f(5) = -4 + 50 - 25 = 21$

el punto pedido es $\boxed{P(5,21)}$

c) Sustituimos primero el valor de A en la función $f(x) = \begin{cases} 3x + 8 & si\ x \le 3 \\ -4 + 10x - x^2 & si\ x > 3 \end{cases}$

Comparamos el valor de $f(5)$ con el valor de la función en los extremos del intervalo $[4,8]$

- $f(4) = -4 + 40 - 16 = 20 < f(5)$
- $f(8) = -4 + 80 - 64 = 12 < f(5)$

Luego $\boxed{(5,21) \text{ máximo absoluto}}$. Además $f(8) < f(4)$, luego $\boxed{(8,12) \text{ mínimo absoluto}}$

---

96) Sea la función $f(x) = x^2 sen\, x$, se pide:

a) Si $f(x)=0 \Rightarrow x^2 sen\ x=0 \Rightarrow \left\langle \begin{array}{l} x=0 \notin (\pi/2,\pi) \\ sen\ x=0 \Rightarrow \left\langle \begin{array}{l} x=0 \notin (\pi/2,\pi) \\ x=\pi \notin (\pi/2,\pi) \end{array}\right. \end{array}\right.$

Como la función es continua en $(\pi/2,\pi)$ y $f(\pi/2)=\dfrac{\pi^2}{4}>0$ y $f(\pi)=0$ por Bolzano no podemos asegurar que tiene solución en el intervalo $(\pi/2,\pi)$

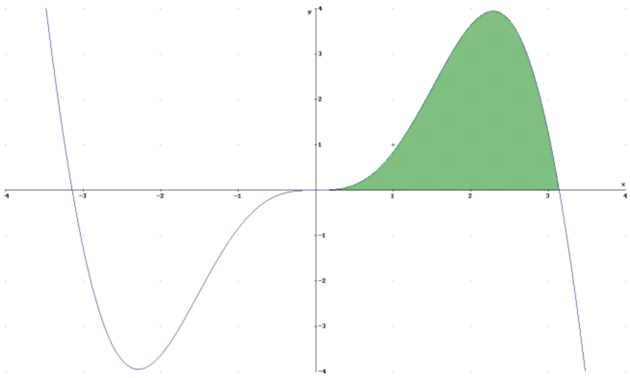
b) Calculamos primero la primitiva $\int x^2 sen\ x\, dx$ por partes: $\left\{\begin{array}{c} u=x^2 \Rightarrow du=2x\, dx \\ dv=sen\ x\, dx \Rightarrow v=-\cos x \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\int x^2 sen\ x\, dx = -x^2\cos x - \int -2x\cos x\, dx = -x^2\cos x + \int 2x\cos x\, dx =$ procediendo por partes de nuevo

en $\int 2x\cos x\, dx \left\{\begin{array}{c} u=2x \Rightarrow du=2\, dx \\ dv=\cos x\, dx \Rightarrow v=sen\ x \end{array}\right\} \Rightarrow \int x^2 sen\ x\, dx = -x^2\cos x + 2x\ sen\ x - \int 2\ sen\ x\, dx =$

$= -x^2\cos x + 2x\ sen\ x + 2\cos x + C$

Así: $\int_0^{\pi} x^2 sen\ x\, dx = \left[-x^2\cos x + 2x\ sen\ x + 2\cos x\right]_0^{\pi} = \left(-\pi^2\cos\pi + 2\pi\ sen\ \pi + 2\cos\pi\right) - 2 = \boxed{\pi^2 - 4}$



c) La ecuación de la recta tangente a una curva $y=f(x)$ en el punto $(\pi, f(\pi))$ es de la forma:

$$y - f(\pi) = f'(\pi)(x-\pi)$$

Como $f(x)=x^2 sen\ x \Rightarrow f'(x)=2x\ sen\ x + x^2\cos x \Rightarrow f'(\pi)=-\pi^2$ y $f(\pi)=0$, la recta tangente será:

$y-=-\pi^2(x-\pi)$. La recta normal es perpendicular a la recta tangente, luego su pendiente será $-\dfrac{1}{f'(\pi)}$, es decir, $\dfrac{1}{\pi^2}$. Con lo que la ecuación de la recta normal en el punto $(\pi, f(\pi))$ será $\boxed{y=\dfrac{1}{\pi^2}(x-\pi)}$

---

97) Sea la función: $f(x)=\dfrac{x^3}{(x-3)^2}$

a) Asíntotas

- Verticales.- Es claro que $\boxed{x=3}$ es asíntota vertical, pues $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^3}{(x-3)^2}=\infty$

- Horizontales.- No tiene, puesto que $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3}{(x-3)^2}=\infty$.

- Oblicuas.- $m=\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{x(x-3)^2}\right)=1$, $n=\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)-mx\right)=$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{(x-3)^2}-x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3-x(x-3)^2}{(x-3)^2}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{6x^2+9}{(x-3)^2}\right)=6$. Así asíntota oblicua $\boxed{y=x+6}$

b) La ecuación de la recta tangente a una curva $y=f(x)$ en el punto $(2, f(2))$ es de la forma:

$$y-f(2)=f'(2)(x-2)$$

Como $f(x)=\dfrac{x^3}{(x-3)^2}\Rightarrow f'(x)=\dfrac{x^3-9x^2}{(x-3)^3}\Rightarrow f'(2)=28$. Como $f(2)=8$, la recta tangente será:

$$\boxed{y-8=28(x-2)}$$

---

98) a) Descomponiendo: $\displaystyle\int \frac{x-3}{x^2+9}\,dx=\int\frac{x}{x^2+9}\,dx-\int\frac{3}{x^2+9}\,dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x}{x^2+9}\,dx-\int\frac{3}{9\left(\frac{x^2}{9}+1\right)}\,dx=$

$$=\frac{1}{2}\ln(x^2+9)-\int\frac{3/9}{\left(\frac{x}{3}\right)^2+1}\,dx=\frac{1}{2}\ln(x^2+9)-\int\frac{1/3}{1+\left(\frac{x}{3}\right)^2}\,dx=\boxed{\frac{1}{2}\ln(x^2+9)-arctg\left(\frac{x}{3}\right)+C}$$

b) Calculamos $\displaystyle\int\frac{3-x^2+x^4}{x^3}\,dx=\text{separando}=\int\frac{3}{x^3}\,dx-\int\frac{x^2}{x^3}\,dx+\int\frac{x^4}{x^3}\,dx=\int 3x^{-3}\,dx-\int\frac{1}{x}\,dx+\int x\,dx=$

$$=\frac{3x^{-2}}{-2}-\ln(x)+\frac{x^2}{2}+C=-\frac{3}{2x^2}-\ln(x)+\frac{x^2}{2}+C$$

Así: $\displaystyle\int_1^2\frac{3-x^2+x^4}{x^3}\,dx=\left[-\frac{3}{2x^2}-\ln(x)+\frac{x^2}{2}\right]_1^2=\left(-\frac{3}{8}-\ln 2+2\right)-\left(-\frac{3}{8}-\ln 1+\frac{1}{2}\right)=\boxed{\frac{21}{8}-\ln 2}$

---

99) Sea la función $f(x)=2\cos^2 x$

a) Extremos Absolutos.- $f'(x)=-4\cos x\cdot sen\,x=-2sen\,2x\Rightarrow f'(x)=0\Rightarrow -2sen\,2x=0\Rightarrow\left\langle\begin{array}{l}x=0\\x=\pm\pi/2\end{array}\right.$

$f''(x)=-4\cos 2x\Rightarrow\left\langle\begin{array}{l}f''(0)=-2<0\\f''(\pm\pi/2)=2>0\end{array}\right.$, luego $x=\pm\pi/2$, mínimos relativos y $x=0$ máximo relativo

Como $f(0)=2$ y $f\left(\pm\frac{\pi}{2}\right)=0$ $\boxed{(0,2)\text{ máximo absoluto}}$ y $\boxed{\left(\pm\frac{\pi}{2},0\right)\text{ mínimos absolutos}}$

b) Puntos de Inflexión.- $f''(x)=-4\cos 2x=0\Rightarrow \cos 2x=0\Rightarrow \left\langle \begin{array}{l} x=\pi/2 \\ x=-\pi/2 \end{array}\right.$

$f'''(x)=8\,sen\,2x\Rightarrow f'''\left(\pm\frac{\pi}{4}\right)=8\neq 0\Rightarrow$, luego $\boxed{\left(\pm\frac{\pi}{4},0\right)\text{ puntos de inflexión}}$

c) Calculamos primero la primitiva $\int 2\cos^2 x\,dx$. Para ello tendremos en cuenta:

$\left\{\begin{array}{l} \cos^2 x+sen^2 x=1 \\ \cos^2 x-sen^2 x=\cos 2x \end{array}\right\}\Rightarrow$ Sumando ambas expresiones: $2\cos^2 x=1+\cos 2x$

Así: $\int 2\cos^2 x\,dx=\int (1+\cos 2x)\,dx=\int dx+\int \cos 2x\,dx=x+\frac{sen\,2x}{2}+C$

Por tanto: $\int_0^{\pi/2} 2\cos^2 x=\left[x+\frac{sen\,2x}{2}\right]_0^{\pi/2}=\left(\frac{\pi}{2}+\frac{sen\,\pi}{2}\right)-\left(0+\frac{sen\,0}{2}\right)=\boxed{\frac{\pi}{2}}$

---

100) Sea la función $f(x)=\frac{4}{x-4}+\frac{27}{2x+2}$

a) Asíntotas.- Verticales.- Es claro que $\boxed{x=3}$ es asíntota vertical, pues $\lim_{x\to 4}\frac{4}{x-4}+\frac{27}{2x+2}=\infty$

También $\boxed{x=-1}$ es asíntota vertical, pues $\lim_{x\to -1}\frac{4}{x-4}+\frac{27}{2x+2}=\infty$

- Horizontales.- $\lim_{x\to\infty}\frac{4}{x-4}+\frac{27}{2x+2}=0$, luego $\boxed{y=0}$
- Oblicuas.- No tiene

b) Calculamos la primera derivada $f'(x)=\frac{-4}{(x-4)^2}-\frac{54}{(2x+2)^2}=-\frac{4(2x+2)^2-54(x-4)^2}{(x-4)^2(2x+2)^2}=$

$=-\frac{35x^2-200x+440}{2(x-4)^2(x+1)^2}=0\Rightarrow 35x^2-200x+440=0\Rightarrow 7x^2-40x+88=0$, ecuación sin solución real.

La función es decreciente en su dominio

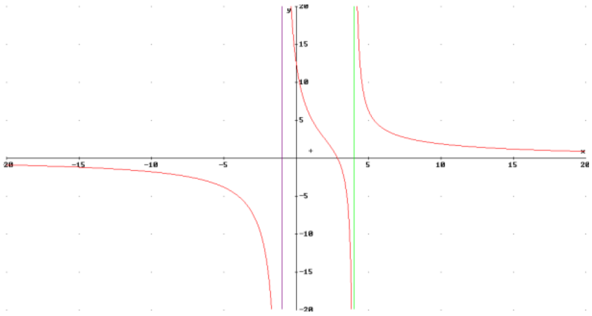
$\boxed{\text{En } (-\infty,-1) \text{ decrece, en } (-1,4) \text{ decrece, en } (4,+\infty) \text{ decrece}}$

Calculamos la segunda derivada

$$f''(x)=\frac{8}{(x-4)^3}+\frac{256}{(2x+2)^2}=-\frac{35x^x-300x^2+1320x-1720}{(x-4)^1(x+1)^1}$$

Igualando a cero: $x=2$,

Luego el punto de inflexión será $\boxed{\left(2,\frac{5}{2}\right)}$



---

101) Sea la función $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$. Su dominio es R

a) La ecuación de la recta tangente a una curva $y=f(x)$ en el punto $x=0$ es de la forma:

$$y-f(0)=f'(0)\cdot x$$

Como $f(x)=\frac{x}{x^2+1}\Rightarrow f'(x)=\frac{1-x^2}{x^2+1}\Rightarrow f'(0)=1$. Como $f(0)=0$, la recta tangente será: $y-0=x$

Es decir: $\boxed{y=x}$

b) Calculamos primero $\int x\, f(x)\,dx=\int \frac{x^2}{x^2+1}dx=\text{dividiendo}=\int\left(1-\frac{1}{x^2+1}\right)dx=x-arctg(x)+C$

Así: $\int_0^1 x\cdot f(x)=\left[x-arctg(x)\right]_0^1=1-arctg(1)-0=1-\frac{\pi}{4}=\boxed{\frac{4-\pi}{4}}$

---

102) Sea la función $f(x)=e^{1/x}$.Su dominio es $R-\{0\}$.

a) $\lim\limits_{x\to-\infty}=f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}e^{1/x}=e^{1/-\infty}=e^0=1$; $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{1/x}=e^{1/+\infty}=e^0=1$, luego $\boxed{\lim\limits_{x\to\infty}e^{1/x}=1}$

$\lim\limits_{x\to0^-}e^{1/x}=e^{1/0^-}=e^{-\infty}=0$; $\lim\limits_{x\to0^+}e^{1/x}=e^{1/0^+}=e^{+\infty}=+\infty$, luego $\boxed{\text{no existe}\lim\limits_{x\to0}e^{1/x}}$

b) Asíntotas.- Por lo visto en el apartado anterior $\boxed{y=1}$ es asíntota horizontal

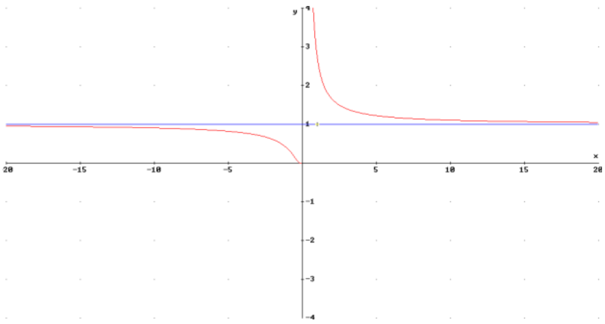
Es claro que $\boxed{x=0}$ es asíntota vertical por la derecha pues $\lim\limits_{x\to0^+}e^{1/x}=+\infty$

No tiene oblicuas

Derivando: $f'(x)=e^{1/x}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)<0$

para cualquier punto del dominio.

Luego la función será siempre decreciente



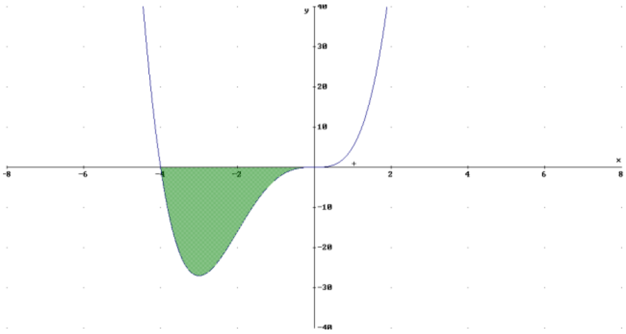
103) a) $f'(-2)$ es la pendiente de la recta tangente a $f(x)$ en $x=-2$, en dicho punto. Como esta recta tangente e $y=16x+16$ (de pendiente 16), $\boxed{f'(-2)=16}$. Además la recta tangente pasa por $x=-2$, luego $f(-2)=16(-2)+16=-16 \Rightarrow \boxed{f(-2)=-16}$.

Por último, si en $x=-2$ la función tiene un punto de inflexión, $\boxed{f''(-2)=0}$

b) Sea $f(x)=x^4+x^3$. Dicha función corta al eje OX en los puntos (-4,0) y (0,0)

Además en el intervalo (-4,0) es siempre negativa

$$A=\left|\int_{-4}^{0}(x^4+4x^3)\,dx\right|=\left|\left[\frac{x^5}{5}-x^4\right]_{-4}^{0}\right|=\left|-\left(\frac{4^5}{5}-4^4\right)\right|=\boxed{\frac{256}{5}}$$



---

104) a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-2x-e^x+sen(3x)}{x^2}=\dfrac{0}{0}=L'H=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-2-e^x+3\cos(3x)}{2x}=\dfrac{0}{0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-e^x-9sen(3x)}{2}=\boxed{-\dfrac{1}{2}}$

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(5x^2+2)(x-6)}{(x^2-1)(2x-1)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3-30x^2+2x-12}{2x^3-x^2-2x+1}=\dfrac{\infty}{\infty}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{5x^3}{x^3}-\dfrac{30x^2}{x^3}+\dfrac{2x}{x^3}-\dfrac{12}{x^3}}{\dfrac{2x^3}{x^3}-\dfrac{x^2}{x^3}-\dfrac{2x}{x^3}+\dfrac{1}{x^3}}=$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5-\dfrac{30}{x}+\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{12}{x^3}}{2-\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}}=\boxed{\dfrac{5}{2}}$

---

105) Sea la función $f(x)=\begin{cases} a+\ln(1-x) & si \quad x<0 \\ x^2e^{-x} & si \quad x\geq 0\end{cases}$.

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2e^{-x}\right)=(+\infty)\cdot 0=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2}{e^x}\right)=\dfrac{\infty}{\infty}=L'H=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x}{e^x}\right)=\boxed{0}$

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(a+\ln(1-x)\right)=\boxed{\infty}$

b) $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left(a+\ln(1-x)\right)=a$; $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2e^{-x}\right)=0$

Igualando límites laterales, $\boxed{a=0}$

c) $f'(x)=\begin{cases} -\dfrac{1}{1-x} & si \quad x<0 \\ (2x-x^2)e^{-x} & si \quad x>0 \end{cases}$ Evaluando en el $x=0$ derivadas laterales,

$f'(0^-)=\left(-\dfrac{1}{1-x}\right)_{x=0}=-1$, $f'(0^+)=\left((2x-x^2)e^{-x}\right)_{x=0}=0$. Como son distintas, la función no es derivable en el punto $x=0$

---

106) Sea la función $f(x)=\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{x}{x+4}$.

a) Operando: $f(x)=\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{x}{x+4}=\dfrac{x+4+x(x+1)}{(x+1)(x+4)}=\dfrac{x^2+2x+4}{(x+1)(x+4)}$

Dominio: $\boxed{R-\{-1,-4\}}$

Asíntotas:

- Verticales.- $\lim_{x\to -1} f(x)=\lim_{x\to -1}\dfrac{x^2+2x+4}{(x+1)(x+4)}=\pm\infty \Rightarrow \boxed{x=-1}$

  $\lim_{x\to -4} f(x)=\lim_{x\to -1}\dfrac{x^2+2x+4}{(x+1)(x+4)}=\pm\infty \Rightarrow \boxed{x=-4}$
- Horizontales.- $\lim_{x\to \infty} f(x)=\lim_{x\to \infty}\dfrac{x^2+2x+4}{(x+1)(x+4)}=1 \Rightarrow \boxed{y=1}$
- Oblicuas.- No tiene, pues tiene horizontales

b) Derivando: $\boxed{f'(x)=\dfrac{3x^2-12}{(x+1)^2(x+4)^2}}$

Igualando a cero: $f'(x)=\dfrac{3x^2-12}{(x+1)^2(x+4)^2}=0 \Rightarrow 3x^2-12=0 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=\pm 2$

$(-\infty,-4)$	$(-4,-2)$	$(-2,-1)$	$(-1,2)$	$(2,+\infty)$
$\uparrow$	$\uparrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\uparrow$

Luego $\boxed{(-2,-2)}$ máximo y $\boxed{\left(2,\dfrac{2}{3}\right)}$ mínimo

c) $\displaystyle\int f(x)\,dx=\int\left(\frac{1}{x+1}+\frac{x}{x+4}\right)dx=\int\left(\frac{1}{x+1}\right)dx+\int\left(\frac{x}{x+4}\right)dx=\ln(x+1)+\int\left(\frac{x}{x+4}\right)dx$

$$\int \left(\frac{x}{x+4}\right) dx = \text{dividiendo} = \int \left(1 - \frac{4}{x+4}\right) dx = x - 4\ln(x+4)$$

Con lo que $\displaystyle\int f(x)\,dx = \ln(x+1) + x - 4\ln(x+4) + C$

Así $\displaystyle\int_0^1 f(x) = \left[\ln(x+1) + x - 4\ln(x+4)\right]_0^1 = \ln(2) + 1 - 4\ln(5) - \left(\ln(1) - 4\ln(4)\right) =$

$$= \ln(2) + 1 - 4\ln(5) + 4\ln(4) = \ln(2) + 1 - 4\ln(5) + 8\ln(2) = \boxed{9\ln(2) - 4\ln(5) + 1}$$

---

107) Sea la función: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{5sen\ x}{2x} + \dfrac{1}{2} & si \quad x < 0 \\ a & si \quad x = 0 \\ xe^x + 3 & si \quad x > 0 \end{cases}$

a) Si ha de ser continua en el cero: $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{5sen\ x}{2x} + \frac{1}{2}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{5sen\ x + x}{2x}\right) = \frac{0}{0} = L'H = \lim_{x\to 0}\left(\frac{5\cos x + 1}{2}\right) = 3$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0}\left(xe^x + 3\right) = 3 \Rightarrow \boxed{a = 3}$$

b) Derivando: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{10x\cos x - 10sen\ x}{4x^2} & si \quad x < 0 \\ e^x(x+3) & si \quad x > 0 \end{cases}$, calculando derivadas laterales en $x = 0$

$$f'(0^-) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{10x\cos x - 10sen\ x}{4x^2}\right) = \frac{0}{0} = L'H = \lim_{x\to 0}\left(\frac{10\cos x - 10x \cdot sen\ x - 10\cos x}{8x}\right) =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{-10 \cdot sen\ x}{8}\right) = 0$$

$f'(0^+) = \left(\left(e^x(x+3)\right)\right)_{x=0} = 3$. Como son distintas, la función **no** es derivable en $x = 0$

c) $\displaystyle\int_1^{\ln 5} f(x)\,dx = \int_1^{\ln 5} (e^x(x+3))\,dx$

Calculamos primitiva $\displaystyle\int (e^x(x+3))\,dx = \int (xe^x + 3x)\,dx = \int xe^x\,dx + \int 3\,dx = \int xe^x\,dx + 3x$

Integrando por partes $\int xe^x\,dx = \left\{\begin{array}{c} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x \end{array}\right\} = xe^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x + C$

Así:

$$\int (e^x(x+3))\,dx = xe^x - e^x + 3x + C \Rightarrow \int_1^{\ln 5} (e^x(x+3))\,dx = \left[xe^x - e^x + 3x\right]_1^{\ln 5} = 5\ln 5 - 5 + 3\ln 5 - 3 = \boxed{8\ln 5 - 8}$$

---

108) Sea $f(x) = \dfrac{x}{x^2-4} + \dfrac{\ln(x+1)}{x+1}$

a) Dominio de $\dfrac{x}{x^2-4}$, $R - \{\pm 2\}$; Dominio de $\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}$, $(-1,+\infty)$

Luego dominio de f $\boxed{D = (-1,2)\cup(2,+\infty)}$

<u>Asíntotas</u>.

- <u>Verticales</u>: $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty 2^-}\left(\dfrac{x}{x^2-4} + \dfrac{\ln(x+1)}{x+1}\right) = -\infty + (-\infty) = -\infty$,

  $\lim\limits_{x\to\infty 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+}\left(\dfrac{x}{x^2-4} + \dfrac{\ln(x+1)}{x+1}\right) = +\infty + (+\infty) = +\infty$ luego $\boxed{x = 2}$

  $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+}\left(\dfrac{x}{x^2-4} + \dfrac{\ln(x+1)}{x+1}\right) = \dfrac{1}{3} + (+\infty) = +\infty$, luego $\boxed{x = -1}$

- <u>Horizontales</u>:

  $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{x}{x^2-4} + \dfrac{\ln(x+1)}{x+1}\right) = +\infty + \dfrac{+\infty}{+\infty} = L'H = +\infty + \lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{1/(x+1)}{1}\right) = +\infty + 0 = +\infty$,

  luego $\boxed{y = 0}$

b) Derivando: $f'(x) = \dfrac{-4-x^2}{(x^2-4)^2} + \dfrac{1-\ln(x+1)}{(x+1)^2} \Rightarrow f'(0) = -\dfrac{4}{16} + 1 = \dfrac{3}{4}$; $f(0) = 0$

Recta tangente: $y - f(0) = f'(0)\cdot(x-0) \Rightarrow \boxed{y = \dfrac{3}{4}x}$

c) $\int f(x)\,dx = \int\left(\dfrac{x}{x^2-4} + \dfrac{\ln(x+1)}{x+1}\right)dx = \int\left(\dfrac{x}{x^2-4}\right)dx + \int\left(\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}\right)dx$ **(*)**

- $\int\left(\dfrac{x}{x^2-4}\right)dx = \dfrac{1}{2}\int\left(\dfrac{2x}{x^2-4}\right)dx = \dfrac{1}{2}\ln\left|x^2-4\right| + C$

- $\int\left(\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}\right)dx =$ (cambio $t = \ln(x+1) \Rightarrow dt = \dfrac{dx}{x+1}$) $= \int t\cdot dt = \dfrac{t^2}{2} + C = \dfrac{1}{2}\left(\ln\left|x+1\right|^2\right) + C$

Sustituyendo en (*) : $\boxed{\frac{1}{2}\ln\left|x^2-4\right|+\frac{1}{2}\left(\ln\left|x+1\right|^2\right)+C}$

---

109) Sea la función: $f(x)=\begin{cases}\dfrac{sen\ x}{x} & si \quad x<0 \\ xe^x+1 & si \quad x\geq 0\end{cases}$

a) Continuidad de f . En $R-\{0\}$ es continua por ser operaciones con funciones continuas

En $x=0$. Estudiamos límites laterales:

- $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{sen\ x}{x}\right)=\dfrac{0}{0}=L'H=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\cos x}{1}\right)=1$;
- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}(xe^x+1)=1$

Luego la función en continua en R

b) Derivabilidad .- Derivando la función: $f'(x)=\begin{cases}\dfrac{x\cos x-sen\ x}{x^2} & si \quad x<0 \\ (x+1)e^x & si \quad x>0\end{cases}$

En principio es derivable en $R-\{0\}$

En $x=0$. Estudiamos derivadas laterales:

$$f'(0^-)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x\cos x-sen\ x}{x^2}\right)=\frac{0}{0}=L'H=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x-x\cdot sen\ x-\cos x}{2x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{-x\cdot sen\ x}{2x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{-sen\ x}{2}\right)=0$$

$$f'(0^+)=\left((x+1)e^x\right)_{x=0}=1$$

Con lo que no es derivable en $x=0$

c) $\displaystyle\int_1^3 f(x)\,dx=\int_1^3(xe^x+1)\,dx=\int_1^3 xe^x\,dx+\int_1^3 dx=(*)$

Integrando por partes $\displaystyle\int xe^x\,dx=\left\{\begin{matrix}u=x\Rightarrow du=dx\\ dv=e^x dx\Rightarrow v=e^x\end{matrix}\right\}=xe^x-\int e^x\,dx=xe^x-e^x+C$

Luego sustituyendo en (*) : $\left[xe^x-e^x+x\right]_1^3=(2e^3-e^3+3)-(e-e+1)=\boxed{2+2e^3}$

---

110) a) Sea $f(x)=1+2x+3x^2+4x^3\Rightarrow f'(x)=2+6x+12x^2>0$, luego la función siempre es creciente en R

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+2x+3x^2+4x^3\right)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left(1+2x+3x^2+4x^3\right)=+\infty$

Como $f(x)=1+2x+3x^2+4x^3$ es continua en R (es un polinomio), por Bolzano existe un punto en el que se anula (tiene una solución real $1+2x+3x^2+4x^3=0$). Además es única ya que la derivada no se anula nunca. (ver apartado a))

El intervalo [-1,0] es el pedido, pues: $f(-1)=-2<0$ y $f(0)=1>0$

---

111) a) Calculamos la primitiva $\int (1-x)\,e^{-x}\,dx$ por partes:

$$\int (1-x)e^{-x}\,dx = \left\{ \begin{array}{l} u=1-x \Rightarrow du=dx \\ dv=e^{-x}dx \Rightarrow v=-e^{-x} \end{array} \right\} = -(1-x)e^{-x} + \int e^{-x}\,dx = (x-1)e^{-x}+e^{-x}+C=$$

$$= xe^{-x} - e^{x} + e^{-x} + C = xe^{-x}+C$$

Así: $\displaystyle\int_1^4 (1-x)\,e^{-x}\,dx = \left[xe^{-x}\right]_1^4 = 4e^{-4}-e^{-1} = \boxed{\frac{4}{e^4}-\frac{1}{e}}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}(1-x)\,e^{-x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1-x}{e^x} = \frac{-\infty}{+\infty} = L'H = \lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{e^x} = \boxed{0}$

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}(1-x)\,e^{-x} = (+\infty)\div(+\infty) = \boxed{+\infty}$

---

112) Sea la función $f(x)=\begin{cases} a+x\ln(x) & si\ x>0 \\ x^2e^x & si\ x\le 0 \end{cases}$:

a) Continuidad de f. En $R-\{0\}$ es continua por ser operaciones con funciones continuas

En $x=0$. Estudiamos límites laterales:

- $\displaystyle\lim_{x\to0^-} f(x)=\lim_{x\to0}\left(x^2e^x\right)=0$;
- $\displaystyle\lim_{x\to0^+} f(x)=\lim_{x\to0}(a+x\ln(x))=a+0\cdot(-\infty)=a+\lim_{x\to0}\left(\frac{\ln(x)}{1/x}\right)=a+\frac{-\infty}{+\infty}=L'H=a+\lim_{x\to0}\left(\frac{1/x}{-1/x^2}\right)=$

  $\displaystyle=a+\lim_{x\to0}(-x)=a+0$

Igualando $a+0=0\Rightarrow \boxed{a=0}$

b) Haciendo $a=0$. $f'(x)=\begin{cases} 1+\ln(x) & si\ x>0 \\ (x+2)\,xe^x & si\ x<0 \end{cases}$ Veamos que ocurre en $x=0$

$f'(0^-)=\displaystyle\lim_{x\to0}\left((x+2)xe^x\right)_{x=0}=0$; $f'(0^+)=\displaystyle\lim_{x\to0}\left(1+\ln(x)\right)_{x=0}=-\infty$. Luego no derivable en $x=0$

c) Calculamos $\int x^2e^x\,dx$ por partes.

$$\int x^2e^x\,dx = \left\{\begin{matrix} u = x^2 \Rightarrow du = 2xdx \\ dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x \end{matrix}\right\} = x^2e^x - \int 2xe^x\,dx = \text{procediendo de nuevo por partes}$$

$$= x^2e^x - \left\{\begin{matrix} u = 2x \Rightarrow du = 2dx \\ dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x \end{matrix}\right\} = x^2e^x - \left(2xe^x - \int 2xe^x\,dx\right) = x^2e^x - 2xe^x + \int 2e^x\,dx =$$

$$= x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + C$$

Luego $\int_{-1}^{0} f(x)\,dx = \left[x^2e^x - 2xe^x + 2e^x\right]_{-1}^{0} = \boxed{2 - \frac{5}{e}}$
